

7. Übungsblatt Funktionalanalysis — 28.01.2010

Übung 53. Betrachte den Fredholmschen Integraloperator

$$K : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$
$$f \mapsto \int k(x, y) f(y) dy$$

mit Kernfunktion $k \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Zeige, daß $\|K : L^2 \rightarrow L^2\| \leq \|k\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}$ und daß K ein kompakter Operator ist.

Übung 54. Sei $c = (c_n)$ eine Nullfolge. Zeige, daß der Multiplikationsoperator

$$M_c : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$
$$(x_n) \mapsto (c_n x_n)$$

kompakt ist und bestimme sein Spektrum.

Übung 55. Bestimme das Spektrum des Shiftoperators

$$S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$
$$(\xi_1, \xi_2, \dots) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$$

sowie des adjungierten Operators $S^* : \ell^2 \rightarrow \ell^2$. Welche Spektralwerte sind jeweils Eigenwerte?

Übung 56. Zeige die Resolventengleichungen

1. $R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T)$, $\forall \lambda, \mu \in \rho(T)$
2. $R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(T - S)R_\lambda(T)$, $\forall \lambda \in \rho(S) \cup \rho(T)$