Formelsammlung zur Vorlesungsprüfung
Mathematik II, M

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{array}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte: Für jedes j ist

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}).$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.
Invertierbarkeitskriterium: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.
Cramersche Regel: Ist A eine invertierbare Matrix, dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung

$$\frac{1}{\det(A)}(\det(A_1), \dots, \det(A_n))^t,$$

wobei A_i aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.
Inverse von 2×2 Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix}.$$

Basen und Koordinatentransformation

Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, falls die Matrix $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ Rang n hat, also $\det(B) \neq 0$.
Transformationsmatrix: Die Transformationsmatrix von einer Basis B zu einer Basis C ist die Matrix

$$T = (B^{-1}C)^t.$$

Hat ein Punkt die Koordinaten $\vec{v}_B$ zur Basis B und $\vec{v}_C$ zur Basis C, dann gilt

$$\vec{v}_C = (T^t)^{-1}\vec{v}_B = C^{-1}B\vec{v}_B.$$

Kegelschnitte und Hauptachsentransformation

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Äquivalent ist

$$\vec{x}^t A\vec{x} + \vec{p}^t\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e\end{pmatrix}.$$

Fall $\det(A) \neq 0$*:*

- Berechne $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f$.
- Die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ liefert die Gleichung
$$\vec{y}^t A\vec{y} + C = 0.$$
- Bestimme die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie je einen normierten Eigenvektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Wähle dabei die Vektoren so, dass in der Matrix $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ die Gleichung $s_{12} = -s_{21}$ gilt.
- Bestimme den Winkel φ, für den gilt
$$S = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}.$$
- Die Substitution $\vec{y} = S\vec{z}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$
- Für die Lösungsmenge für $\vec{z}$ gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen	zwei Geraden durch den Ursprung
Alle Werte < 0 oder alle > 0	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen, C anderes Vorzeichen	Ellipse
$C \neq 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen	Hyperbel

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ um φ gedreht und um $\vec{q}$ verschoben.
Fall $\det(A) = 0$*:* Falls $A = 0$, ist die Lösungsmenge eine Gerade. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von A ist 0, berechne den anderen Eigenwert λ_1 und Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zum Eigenwert 0. Wähle dabei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ so, dass in der Matrix $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ die Gleichung $s_{12} = -s_{21}$ gilt.
- Berechne
$$\begin{pmatrix} g \\ h\end{pmatrix} = S^t\vec{p}.$$
- Bestimme den Drehwinkel φ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Die Substitution $\vec{x} = S\vec{y}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 y_1^2 + gy_1 + hy_2 + f = 0$$
- Falls $h = 0$, dann gilt für die Lösungsmenge für $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	eine senkrechte Gerade
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei senkrechte Geraden

- Falls $h \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ eine Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^t$.

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ um φ gedreht.

Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer homogenen DGL

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = 0 \qquad \text{ist}$$

$$y_H(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = f(x) \qquad \text{ist}$$

$$y_I(x) = s(x) \cdot \int \frac{f(x)}{b(x)s(x)}dx,$$

$$\text{mit } s(x) = \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)}dx\right).$$

Charakteristisches Polynom: Zu einer DGL

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gibt es das charakteristische Polynom

$$a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Ein Fundamentalsystem einer homogenen DGL ist gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jede reelle Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$, wobei k die Vielfachheit der Nullstelle ist, sowie
- Für jedes Paar komplexer Nullstellen $\alpha \pm \beta i$ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, wobei k die Vielfachheit der Nullstellen ist.

Variation der Konstanten bei DGL zweiter Ordnung: Ist $y_H(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

dann ist $y_I(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL

$$a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x), \qquad \text{wobei}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx \quad \text{und}$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)}dx.$$

Spezielle Ansätze:

Störfunktion	**Ansatz für $y_I(x)$**
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x}P(x)$	$e^{\lambda x}Q(x)$
$\sin(\alpha x)$ $\cos(\alpha x)$ $a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)$	$c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)$
$P(x)\sin(\alpha x)$ $P(x)\cos(\alpha x)$ $P(x)\sin(\alpha x) + Q(x)\cos(\alpha x)$	$R(x)\sin(\alpha x) + S(x)\cos(\alpha x)$
$ae^{\lambda x}\sin(\alpha x)$ $ae^{\lambda x}\cos(\alpha x)$ $e^{\lambda x}\big(a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)\big)$	$e^{\lambda x}\big(c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)\big)$

Hierbei sind $a, b, c, d, \lambda, \alpha$ Konstanten und $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ Polynome vom Grad m.
Ist λ, αi oder $\lambda + \alpha i$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss der Ansatz mit x^k multipliziert werden.

Systeme von Differentialgleichungen

Homogene Systeme: Hat die $n \times n$ Matrix A ausschließlich Eigenwerte der Vielfachheiten 1 und 2, dann ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

die Summe von

- $c_ie^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ für jeden einfachen Eigenwert λ_i mit Eigenvektor $\vec{v}_i$,
- $e^{\lambda_i t}(a_i\vec{v}_i + b_i\vec{w}_i)$ für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$,
- $e^{\lambda_i t}(c_it\vec{v}_i + \vec{w}_i)$ für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit nur einem Eigenvektor $\vec{v}_i$. Dabei bezeichnet $\vec{w}_i$ die allgemeine Lösung von
$$(A - \lambda_iI_n)\vec{w} = \vec{v}_i.$$

Inhomogene Systeme: Bilden $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

dann ist

$$\vec{x}_I(t) = \vec{X}\vec{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s},$$

wobei $\vec{X}$ die Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ist und $\vec{c}(t)$ durch

$$\dot{\vec{c}} = \vec{X}^{-1}\vec{s}$$

bestimmt wird.

Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameterdarstellung
Kreis, Radius R	$x^2 + y^2 = R^2$	$x(t) = R\cos(t)$ $y(t) = R\sin(t)$
Ellipse, Halbachsen a, b	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a\cos(t)$ $y(t) = b\sin(t)$
Hyperbel, H.achsen a, b	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a\cosh(t)$ $y(t) = b\sinh(t)$

Tangente: $\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\end{pmatrix}$

Singulärer Punkt ist Punkt $\vec{v}(t)$ mit $\dot{\vec{v}}(t) = 0$.

Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$

In Polarkoordinaten: $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2}d t$

Krümmung:

Parameterdarstellung	Falls $y = y(x)$
$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{y''}{\big(1 + (y')^2\big)^{\frac{3}{2}}}$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(P)}$ und Mittelpunkt (ξ, η) berührt Kurve in P und hat Krümmung κ.

$$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}$$

in Parameterdarstellung. Falls $y = y(x)$, dann

$$\xi = x - \frac{(1 + (y')^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise

Überstrichener Flächeninhalt:

Parameterdarstellung	Polarkoordinaten
$A = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\,dt$	$A = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Raumkurven

Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}dt$

Tangentenvektor $\vec{t} = \dfrac{d\vec{x}}{ds} = \dfrac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Hauptnormalvektor $\vec{n} = \dfrac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|} = \dfrac{\ddot{\vec{x}} - (\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{t})\vec{t}}{\left|\ddot{\vec{x}} - (\ddot{\vec{x}} \cdot \vec{t})\vec{t}\right|} = \vec{b} \times \vec{t}$

Binormalvektor $\vec{b} = \dfrac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\left|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}\right|} = \vec{t} \times \vec{n}$

Krümmung: $\kappa = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

Torsion: $\tau = -\frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} = \vec{b} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \dddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$

Differentialrechnung in mehreren Variablen

Tangentialebene von $f(x,y)$ im Punkt (x_0,y_0) hat die Gleichung $z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(y-y_0)$ und den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{r}$ (mit $|\vec{r}| = 1$) ist $\nabla f \cdot \vec{r}$. Die Richtung des Gradienten ist die Richtung des größten Anstiegs.

Divergenz: Für $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Für $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

Ein Punkt mit positiver Divergenz heißt *Quelle* von $\vec{v}$, ein Punkt mit negativer Divergenz *Senke*. Das Feld heißt *quellenfrei*, wenn die Divergenz überall 0 ist.

Rotation: Für $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$ ist die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$. Das Feld heißt *wirbelfrei*, falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

Implizite Funktionen

Eine Gleichung $f(x,y) = 0$ gibt eine Kurve in impliziter Form an. Ein Punkt (x_0,y_0) auf der Kurve heißt *singulär*, falls $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$. Die Tangente an einem nicht singulären Punkt verläuft horizontal, falls $f_x(x_0,y_0) = 0$, und vertikal, falls $f_y(x_0,y_0) = 0$. Die Tangentengleichung ist

$$\begin{aligned} y &= y_0 - \frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0), &&\text{falls } f_y(x_0,y_0) \neq 0 \\ x &= x_0, &&\text{falls } f_y(x_0,y_0) = 0. \end{aligned}$$

Taylorpolynom Das Taylorpolynom vom Grad n der Funktion $f(x,y)$ um den Entwicklungspunkt (x_0,y_0) ist

$$\begin{aligned} T_n(x,y) = f(x_0,y_0) \\ &+ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\Big(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big) + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0)^i. \end{aligned}$$

Extremwertaufgaben

Die Hesse-Matrix der zweiten Ableitungen einer Funktion heißt *positiv definit*, falls alle Eigenwerte positiv sind, *negativ definit*, falls alle Eigenwerte negativ sind, und *indefinit*, falls sie positive und negative Eigenwerte hat.

Ein *Hauptminor* Δ_k von H ist die Determinante der linken oberen $k \times k$ Teilmatrix.

Kriterium für Definitheit: H ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind. Sie ist genau dann negativ definit, wenn $\Delta_k > 0$ für gerades k und $\Delta_k < 0$ für ungerades k.

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist der Gradient Null.

Hinreichende Bedingung für Extrema: Eine Stelle mit Gradient Null ist ein Maximum, falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, ein Minimum, falls H_f positiv definit ist, und ein Sattelpunkt, falls H_f indefinit ist.

Randextrema:

- Ist (x_0,y_0) ein Maximum von f auf dem Rand des Gebietes G, so ist (x_0,y_0) genau dann ein Maximum auf G, falls (x_0,y_0) eine Ecke von G ist oder der Gradient bei (x_0,y_0) von G weg zeigt.
- Ist (x_0,y_0) ein Minimum von f auf dem Rand des Gebietes G, so ist (x_0,y_0) genau dann ein Minimum auf G, falls (x_0,y_0) eine Ecke von G ist oder der Gradient bei (x_0,y_0) in G hinein zeigt.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.

Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

Sind $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ gegeben und $ax+b$ eine Gerade, so wird $\sum_{k=1}^{n}(y_k - (ax_k + b_k))^2$ minimiert durch

$$a = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_k y_k & \sum x_k \\ \sum y_k & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad b = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k y_k \\ \sum x_k & \sum y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_k^2 & \sum x_k \\ \sum x_k & n \end{vmatrix}}.$$

Extrema unter Nebenbedingungen

Ein Extremum von $f(x,y)$ unter der Bedingung $g(x,y) = 0$ erfüllt für $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ stets $\nabla F = 0$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bernoullische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$ mit $\alpha \neq 0, 1$

- Multipliziere mit $y^{-\alpha}$ und substituiere $z = y^{1-\alpha}$.
- Bestimme die Lösung von $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = -g(x)$.
- Lösung der ursprünglichen DGL ist $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und für positives α auch $y = 0$.

Riccatische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde eine partikuläre Lösung y_p (z.B. durch Ansatz $y = ax^b$ oder $y = ae^{bx}$) und substituiere $y = z + y_p$.
- Bestimme die Lösung von $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ und setze dies in $y = z + y_p$ ein.

Exakte DGL: $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ heißt *exakt*, falls $P_y=Q_x$. Es gibt dann eine Funktion $F(x,y)$, so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung $F(x,y)=c$ beschrieben wird. Man findet F wie folgt.

- Setze $F=\int P dx+\Phi(y)$ und berechne Φ aus der Bedingung $F_y=Q$ oder
- setze $F=\int Q dy+\Psi(x)$ und berechne Ψ aus der Bedingung $F_x=P$.

Integrierender Faktor: Ist $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ nicht exakt, suche eine Funktion $M(x)$ oder $M(y)$ mit

$$M\cdot(P_y-Q_x)=M_xQ \quad \text{bzw.} \quad M\cdot(P_y-Q_x)=-M_yP.$$

Die DGL $MP(x,y)+MQ(x,y)y'=0$ ist dann exakt.

Clairautsche DGL: $y=xy'+h(y')$ hat die Lösungen $y=cx+h(c)$ für $c\in\mathbb{R}$. Einhüllende der Lösungen ist die Kurve $(x,y)=\big(-h'(z),-h'(z)z+h(z)\big)$.

DGL zweiter Ordnung:

- $y''=f(x)\Longrightarrow y=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+c_1x+c_2$
- $y''=f(x,y')\rightsquigarrow$ substituiere $z=y'$
- $y''=f(y,y')\rightsquigarrow$ Löse die DGL $z'\cdot z=f(y,z)$. Löse dann die DGL $y'=z(y)$.

Eulersche DGL: $a_3x^3y'''+a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0$. Substituiere $x=e^t$ und $v(t)=y(e^t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x)&=e^{-t}\cdot\dot v(t),\\ y''(x)&=e^{-2t}\cdot(\ddot v(t)-\dot v(t)),\\ \text{und}\qquad y'''(x)&=e^{-3t}\cdot(\dddot v(t)-3\ddot v(t)+2\dot v(t)). \end{aligned}$$

Mehrfachintegrale

Normalbereich: Ein Bereich der Form

$$B=\{(x,y)\mid a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x)\}$$

heißt Normalbereich bezüglich der y-Achse. Das Integral einer Funktion $f(x,y)$ über B ist dann

$$\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)}f(x,y)dy\right)dx.$$

Für einen Normalbereich bezüglich der x-Achse

$$B=\{(x,y)\mid a\le y\le b, g(y)\le x\le h(y)\}$$

ist das Intergal entsprechend

$$\int_a^b\left(\int_{g(y)}^{h(y)}f(x,y)dx\right)dy.$$

Masse und Schwerpunkt: Eine Fläche B in der x,y Ebene mit Dichtefunktion $\rho(x,y)$ hat

Gesamtmasse	$M=\iint_B\rho(x,y)dxdy$
Stat. Moment zur x-Achse	$M_x=\iint_B y\cdot\rho(x,y)dxdy$
Stat. Moment zur y-Achse	$M_y=\iint_B x\cdot\rho(x,y)dxdy$
Schwerpunkt	$S=\left(\frac{M_y}{M},\frac{M_x}{M}\right)$

Oberflächeninhalt: Die Fläche, die eine Funktion $f(x,y)$ über einem Bereich B definiert, hat den Inhalt

$$O=\iint_B\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}dxdy.$$

Masse und Schwerpunkt: Ein Bereich B im Raum mit Dichtefunktion $\rho(x,y,z)$ hat

Gesamtmasse	$M=\iiint_B\rho(x,y,z)dxdydz$
Schwerpunkt $\begin{pmatrix}x_s\\y_s\\z_s\end{pmatrix}$	$x_s=\frac{\iiint_B x\cdot\rho(x,y,z)dxdydz}{M}$
	$y_s=\frac{\iiint_B y\cdot\rho(x,y,z)dxdydz}{M}$
	$z_s=\frac{\iiint_B z\cdot\rho(x,y,z)dxdydz}{M}$

Trägheitsmoment:

$$I_x=\iiint_B(y^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } x\text{-Achse}$$

$$I_y=\iiint_B(x^2+z^2)\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } y\text{-Achse}$$

$$I_z=\iiint_B(x^2+y^2)\cdot\rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{bzgl. } z\text{-Achse}$$

Polarkoordinaten: Für $x(r,\varphi)=r\cos(\varphi)$, $y(r,\varphi)=r\sin(\varphi)$ und $g(r,\varphi)=f\big(x(r,\varphi),y(r,\varphi)\big)$ gilt

$$\iint_B f(x,y)dxdy=\iint_B r\cdot g(r,\varphi)drd\varphi.$$

Kugelkoordinaten: Für $x(r,\varphi,\theta)=r\cos(\varphi)\sin(\theta)$, $y(r,\varphi,\theta)=r\sin(\varphi)\sin(\theta)$, $z(r,\varphi,\theta)=r\cos(\theta)$ und $g(r,\varphi,\theta)=f\big(x(r,\varphi,\theta),y(r,\varphi,\theta),z(r,\varphi,\theta)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz=\iiint_B r^2\sin(\theta)\cdot g(r,\varphi,\theta)drd\varphi d\theta.$$

Zylinderkoordinaten: Für $x(r,\varphi,z)=r\cos(\varphi)$, $y(r,\varphi,z)=r\sin(\varphi)$, $z(r,\varphi,z)=z$ und $g(r,\varphi,z)=f\big(x(r,\varphi,z),y(r,\varphi,z),z(r,\varphi,z)\big)$ gilt

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz=\iiint_B r\cdot g(r,\varphi,z)drd\varphi dz.$$

Kurvenintegrale: Das Integral über ein Vektorfeld

$$\vec K(x,y,z)=\begin{pmatrix}P(x,y,z)\\Q(x,y,z)\\R(x,y,z)\end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve $\vec x(t)$ ist definiert als

$$\int\vec K\big(\vec x(t)\big)\cdot\dot{\vec x}(t)dt.$$

Oberflächenintegrale: Ist $\vec K$ ein Vektorfeld und F ein Flächenstück, dann ist das Integral von $\vec K$ auf F

$$\iint_B\vec K\big(x,y,f(x,y)\big)\cdot\begin{pmatrix}-f_x\\-f_y\\1\end{pmatrix}dxdy,$$

wenn F in der Form $z=f(x,y)$ mit $(x,y)\in B$ gegeben ist und

$$\iint_B\vec K\big(\vec x(u,v)\big)\cdot(\vec x_u\times\vec x_v)dudv,$$

wenn F in Parameterform $\vec x(u,v)$ gegeben ist.