Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*
8. März 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Beim Gauß'schen Eliminationsverfahren bringen wir zunächst die Zeile nach oben, mit welcher wir in den anderen Zeilen den ersten Eintrag auf 0 bringen wollen. Dazu eignet sich im Allgemeinen die Zeile am besten, deren erster Eintrag der betragmäßig kleinste (aber nicht 0) ist. Insbesondere ein Eintrag 1 ist hierfür von Vorteil.

In diesem Fall steht bereits eine 1 links oben, wir vertauschen also nicht. Mit der ersten Zeile bringen wir die ersten Einträge in der zweiten und der dritten Zeile auf 0, dazu subtrahieren wir die erste Zeile von der zweiten und das Doppelte der ersten Zeile von der dritten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3-2z_1]{z_2-z_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

In der zweiten Spalte steht der betragmäßig kleinste Eintrag in der dritten Zeile, wir vertauschen daher die zweite und dritte Zeile:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Jetzt bringen wir die nächsten Einträge auf 0, indem wir das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten subtrahieren und das Doppelte der zweiten Zeile zur vierten addieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_3-3z_2 \\ z_4+2z_2}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Zuletzt addieren wir noch die dritte Zeile zur vierten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[z_4+z_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Da der Rang der Matrix und der um den Störvektor erweiterten Matrix identisch ist, besitzt das Gleichungssystem eine Lösung. Beim Rückwärtseinsetzen betrachten wir zuerst die dritte Gleichung $-7x_3 - 3x_4 = -7$. Da wir zwei Unbekannte in einer Gleichung haben, setzen wir eine der beiden als Variable an, etwa $x_4 = s$. Daraus ergibt sich $x_3 = 1 - \frac{3}{7}s$. In die zweite Gleichung eingesetzt, erhalten wir $-x_2 + 3(1 - \frac{3}{7}s) + 2s = 3$, also $x_2 = \frac{5}{7}s$. Nun setzen wir noch in die erste Gleichung ein und erhalten $x_1 + 2 \cdot \frac{5}{7}s - s = 2$, also $x_1 = 2 - \frac{3}{7}s$. Lösung des Gleichungssystems sind also alle Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{3}{7}s \\ \frac{5}{7}s \\ 1 - \frac{3}{7}s \\ s \end{pmatrix}.$$

□

***Aufgabe 2.** Bestimmen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Beim Bestimmen des Inversen einer Matrix gehen wir zunächst nach dem Gauß'schen Eliminationsverfahren vor. Danach bringen wir aber noch alle Diagonalelemente auf den Wert 1 und alle anderen Einträge auf 0. Wir beginnen mit dem Schema

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Der beste Eintrag in der ersten Spalte liegt in der zweiten Zeile, wir vertauschen daher die ersten beiden Zeilen:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\qquad} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun subtrahieren wir das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{z_2-2z_1 \\ z_3-2z_1}]{} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt subtrahieren wir das Fünffache der zweiten Zeile vom Dreifachen der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3z_3-5z_2]{} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

Nachdem wir die Zeilenstufenform erreicht haben, gehen wir nun von unten nach oben vor. Zuerst multiplizieren wir die letzte Zeile mit -1:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[-z_3]{} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile ist nun im gewünschten Zustand. Jetzt addieren wir die dritte Zeile zur zweiten und dividieren diese danach durch 3:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right) &\xrightarrow{z_2+z_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{z_2/3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Auch die zweite Zeile hat den gewünschten Zustand erreicht. Jetzt addieren wir zur ersten Zeile noch die zweite und subtrahieren das Dreifache der dritten Zeile:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{z_1+z_2-3z_3} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -13 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -4 & -3 \end{array}\right)$$

Das Inverse der Matrix A ist also

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -13 & 11 & 8 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung: Da es sich bei beiden Gleichungssystemen um die gleiche Matrix handelt, können wir sie simultan lösen. Wir stellen also ein Schema für beide Systeme auf:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} -2 & 1 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen, um eine 1 nach links oben zu bekommen. Dann addieren wir Vielfache der ersten Zeile zu den anderen Zeilen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} -2 & 1 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -2 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & 2 & 5 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{z_3 - z_1 \\ z_4 - 2z_1}]{z_2 + 2z_1} \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

In der zweiten Spalte ist bereits die optimale Zeile an der zweiten Position, wir müssen daher nicht vertauschen.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[z_4+2z_2]{z_3-3z_2} \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[z_4+z_3]{} \left(\begin{array}{rrrr|rr} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen nun, dass die Matrix Rang 3 hat. Für das erste Gleichungssystem hat die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Rang 4, das System ist also nicht lösbar. Für das zweite Gleichungssystem hat die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang 3, dieses System ist also lösbar. Wir setzen rückwärts ein. Die letzte Zeile entspricht der Gleichung $0 = 0$ und liefert uns keine Aussage über die gesuchten x_i. Die dritte Gleichung ist $x_3 - 3x_4 = 0$ oder $x_3 = 3x_4$. Hier haben wir zwei Unbekannte, wir müssen also eine durch eine Variable ersetzen. Setzen wir $x_4 = s$, dann ist $x_3 = 3s$. Die zweite Gleichung ist dann $-x_2 + 2x_4 = -1$, also $x_2 = 1 + 2x_4 = 1 + 2s$. Die erste Gleichung ist $x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1$, also $x_1 = 1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 + (1+2s) - 3s - 2s = 2 - 3s$. Die Lösungen des Gleichungssystems sind somit die Vektoren der Form

$$\begin{pmatrix} 2-3s \\ 1+2s \\ 3s \\ s \end{pmatrix}.$$

□

Aufgabe 4. Bestimmen Sie die Inverse der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir gehen wie in Aufgabe 2 vor. Zuerst stellen wir für A das folgende Schema auf:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und addieren danach Vielfache der ersten Zeile zu den beiden anderen.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{z_2-2z_1 \\ z_3-3z_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Jetzt vertauschen wir die letzten beiden Zeilen und subtrahieren das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[z_3-3z_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Die dritte Zeile ist bereits in der gewünschten Form. Zuletzt bringen wir noch die ersten beiden Zeilen auf diese Form, indem wir die zweite Zeile mit -1 multiplizieren und zur ersten Zeile das Doppelte der dritten addieren.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{z_1+2z_3 \\ -z_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 15 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Somit ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 15 & -6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Für B gehen wir entsprechend vor. Zuerst stellen wir das Schema auf:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir vertauschen die erste und dritte Zeile und addieren dann das Dreifache der ersten Zeile zum Doppelten der zweiten:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{2z_2+3z_1} \left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Jetzt subtrahieren wir noch die zweite Zeile von der dritten und haben Zeilenstufenform erreicht:

$$\left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[z_3-z_2]{} \left(\begin{array}{lrr|lrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Wir multiplizieren die dritte Zeile mit -1 und addieren danach Vielfache von ihr zur zweiten und dritten Zeile.

$$\left(\begin{array}{lrr|lrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[-z_3]{} \left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\substack{z_1+z_3 \\ z_2-3z_3}} \left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Die letzten beiden Zeilen sind nun in der gewünschten Form. Die erste Zeile bringen wir in die gewünschte Form, indem wir die zweite Zeile addieren und danach durch 2 dividieren.

$$\left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & -1 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[z_1+z_2]{} \left(\begin{array}{lrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{\substack{z_1+z_3 \\ z_2-3z_3}} \left(\begin{array}{lrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

Das Inverse von B ist also

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

$\square$