Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

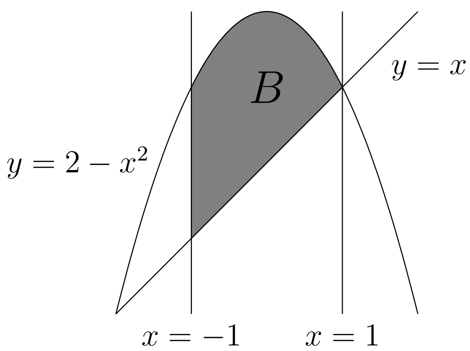
14. Juni 2013

***Aufgabe 1.** Sei $f(x, y) = xy - 1$ und B der durch die Kurven

$$x = -1, \qquad x = 1, \qquad y = x \quad \text{und} \quad y = 2 - x^2$$

beschränkte Bereich. Berechnen Sie das Integral von f auf B in beiden Integrationsreihenfolgen.

Lösung: Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, fertigen wir zunächst eine Skizze von B an:



Die Schnittpunkte der Kurven sind $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ und $(1, 1)$. Somit läuft x von -1 bis 1. Die untere Begrenzung für y ist die Gerade $y = x$, die obere ist die Parabel $y = 2 - x^2$. Also läuft y von x bis $2 - x^2$. Das zu

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

berechnende Integral ist somit

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{x}^{2-x^2} xy - 1dydx = \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}xy^2 - y\right]_{x}^{2-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x(2-x^2)^2 - (2-x^2) - \frac{1}{2}x^3 + xdx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x^5 - \frac{5}{2}x^3 + x^2 + 3x - 2dx \\
&= \left[\frac{1}{12}x^6 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

Für die andere Integrationsreihenfolge müssen wir die Grenzen neu betrachten. Leicht zu sehen ist, dass y von -1 bis 2 läuft. Die untere (linke) Grenze für x ist dabei zuerst die Gerade $x = -1$ (für $-1 \le y \le 1$) und später (für $1 \le y \le 2$) die linke Hälfte der Parabel $y = 2 - x^2$. Die obere (rechte) Grenze ist zuerst die Gerade $y = x$ und dann die rechte Hälfte der Parabel $y = 2 - x^2$. Somit läuft x zuerst von -1 bis y und später von $-\sqrt{2-y}$ bis $\sqrt{2-y}$, denn dies ist die Umkehrfunktion von $y = 2 - x^2$. Wir müssen das Integral also aufteilen und erhalten

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} xy - 1dxdy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} xy - 1dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\left[\frac{1}{2}x^2y - x\right]_{-1}^{y} dy + \int_{1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y - x\right]_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}y^3 - \frac{3}{2}y - 1dy + \int_{1}^{2} -2\sqrt{2-y}dy \\
&= \left[\frac{1}{8}y^4 - \frac{3}{4}y^2 - y\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{4}{3}(2-y)^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{2} = -\frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Berechnen Sie jeweils das Integral von f auf B in beiden Integrationsreihenfolgen.

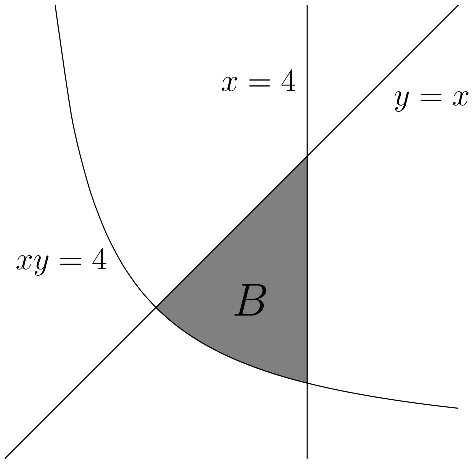
(a) $f(x, y) = y$
B beschränkt durch $y = x$, $xy = 4$ und $x = 4$

(b) $f(x, y) = x^2 + y$
B beschränkt durch $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $x = 0$ und $x = 1$

(c) $f(x, y) = 2xy$
B beschränkt durch $x = y^2 - 4$ und y-Achse

(d) $f(x,y) = x + \sin(y)$
B beschränkt durch $x = -1$, $x = 1$, $y = \pi \cdot |x|$ und die x-Achse.

Lösung: (a) Um die Integrationsgrenzen zu bestimmen, beginnen wir wieder mit einer Skizze von B:



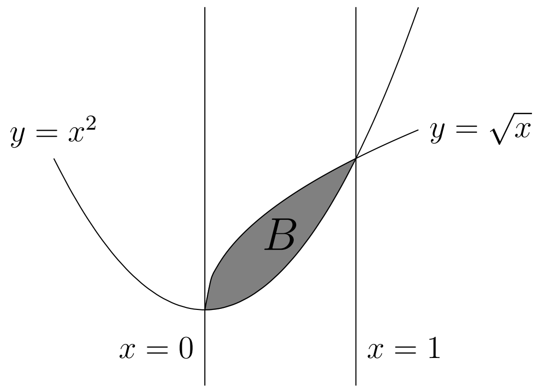
Die Schnittpunkte der Kurven sind $(2,2)$, $(4,1)$ und $(4,4)$, also läuft x von 2 bis 4. Dabei ist die Kurve $xy = 4$ (also $y = \frac{4}{x}$) die untere Grenze von y und die Gerade $y = x$ die obere Grenze, also läuft y von $\frac{4}{x}$ bis x. Das Integral lautet somit

$$I = \int_2^4 \int_{\frac{4}{x}}^x y dy dx = \int_2^4 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{4}{x}}^x dx = \int_2^4 \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{x^2} dx$$
$$= \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{x}\right]_2^4 = \frac{64}{6} + 2 - \frac{8}{6} - 4 = \frac{22}{3}.$$

Für die andere Integrationsreihenfolge läuft y von 1 bis 4. Dabei ist die untere Grenze von x für $1 \leq y \leq 2$ die Kurve $xy = 4$ (also $x = \frac{4}{y}$) und für $2 \leq y \leq 4$ die Gerade $y = x$. Die obere Grenze ist die Gerade $x = 4$, also läuft x zuerst von $\frac{4}{y}$ bis 4 und später von y bis 4. Das Integral muss somit aufgeteilt werden und lautet

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_{\frac{4}{y}}^4 y dx dy + \int_2^4 \int_y^4 y dx dy \\
&= \int_1^2 [xy]_{\frac{4}{y}}^4 dy + \int_2^4 [xy]_y^4 dy \\
&= \int_1^2 4y - 4dy + \int_2^4 4y - y^2 dy \\
&= \left[2y^2 - 4y\right]_1^2 + \left[2y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_2^4 \\
&= 8 - 8 - 2 + 4 + 32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} = \frac{22}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Zuerst wieder eine Skizze von B:



Die Schnittpunkte der Kurven sind $(0,0)$ und $(1,1)$ Also läuft x von 0 bis 1 und dabei ist y von unten durch die Parabel $y = x^2$ und von oben durch die Kurve $y = \sqrt{x}$ begrenzt. Das Integral lautet also

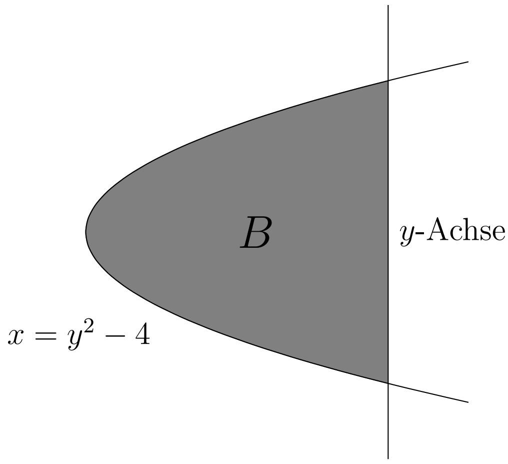
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + y dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4 dx = \left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{10}x^5\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}.
\end{aligned}$$

Für die andere Integrationsreihenfolge läuft y von 0 bis 1. Dabei ist x von links durch y^2 (Umkehrfunktion von $\sqrt{x}$) und von rechts durch $\sqrt{y}$

(Umkehrfunktion von x^2) begrenzt. Das Integral lautet also

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} x^2 + y dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 + xy\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}y^6 - y^3 dy = \left[\frac{8}{15}y^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{21}y^7 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{4} = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$

(c) Zuerst wieder eine Skizze von B:



Die Schnittpunkte der beiden Kurven sind $(0, -2)$ und $(0, 2)$, also läuft x von -4 bis 0. Dabei ist y von unten und oben durch die Parabel $x = y^2 - 4$ begrenzt und läuft daher von $-\sqrt{x+4}$ bis $\sqrt{x+4}$ (Umkehrfunktion von $y^2 - 4$). Das Integral lautet also

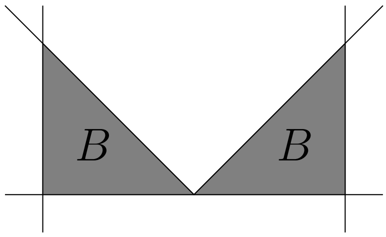
$$\begin{aligned} I &= \int_{-4}^0 \int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} 2xy dy dx = \int_{-4}^0 \left[xy^2\right]_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} dx \\ &= \int_{-4}^0 x(x+4) - x(-x-4) dx = \int_{-4}^0 0 dx = 0. \end{aligned}$$

Für die andere Integrationsreihenfolge läuft y von -2 bis 2. Dabei ist x von links durch die Parabel $x = y^2 - 4$ und von rechts durch die

y-Achse begrenzt, läuft also von $y^2 - 4$ bis 0. Das Integral lautet somit

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{2} \int_{y^2-4}^{0} 2xydxdy = \int_{-2}^{2} \left[x^2 y\right]_{y^2-4}^{0} dy \\
&= \int_{-2}^{2} -(y^2-4)^2 ydy = \int_{-2}^{2} -y^5 + 8y^3 - 16ydy \\
&= \left[-\frac{1}{6}y^6 + 2y^4 - 8y^2\right]_{-2}^{2} \\
&= -\frac{64}{6} + 32 - 32 + \frac{64}{6} - 32 + 32 = 0.
\end{aligned}$$

(d) Zuerst wieder eine Skizze von B:



Also läuft x von -1 bis 1, wobei y von unten durch die x-Achse und von oben durch die Funktion $y = |x|$ begrenzt ist. Also läuft y von 0 bis $|x|$ und das Integral lautet

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \int_{0}^{|x|} x + \sin(y)dydx = \int_{-1}^{1} \left[xy - \cos(y)\right]_{0}^{|x|} dx \\
&= \int_{-1}^{1} x|x| - \cos(x) + 1dx \\
&= \int_{-1}^{0} -x^2 - \cos(x) + 1dx + \int_{0}^{1} x^2 - \cos(x) + 1dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \sin(x) + x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \sin(x) + x\right]_{0}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \sin(-1) + 1\right) + \left(\frac{1}{3} - \sin(1) + 1\right) \\
&= 2 - 2\sin(1) \approx 0.317.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir sowohl $\cos(-x) = \cos(x)$ als auch $\sin(-x) = -\sin(x)$ ausgenutzt.

Für die andere Integrationsreihenfolge läuft y von 0 bis 1. Dabei durchläuft x zwei Intervalle: Einmal von -1 bis $-y$ (linke Hälfte der Kurve $y = |x|$) und einmal von y (rechte Hälfte von $y = |x|$) bis 1. Das Integral lautet also

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\int_{-1}^{-y} x + \sin(y) dx + \int_y^1 x + \sin(y) dx \right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 + x \sin(y) \right]_{-1}^{-y} + \left[\frac{1}{2} x^2 + x \sin(y) \right]_y^1 \right) dy \\
&= \int_0^1 2 \sin(y) - 2y \sin(y) dy \\
&= [-2 \cos(y)]_0^1 + [2y \cos(y)]_0^1 - \int_0^1 2 \cos(y) dy \\
&= -2 \cos(1) + 2 + 2 \cos(1) - [2 \sin(y)]_0^1 = 2 - 2 \sin(1).
\end{aligned}$$

□