Tutorium Mathematik II, M
Lösungen*

24. Mai 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Gleichung der Tangentialebene für alle Punkte auf der Fläche. Wann ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $\mathcal{E}$?

(a) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$, $\qquad \mathcal{E}\colon\ 2x + y - z = 0$

(b) $f(x,y) = e^x\big(1 + \ln(y)\big)$, $\qquad \mathcal{E}\colon\ x, y$-Ebene

(c) $f(x,y) = e^x\big(1 + \ln(y)\big)$, $\qquad \mathcal{E}\colon\ -y + z = 0$

Lösung: Die Gleichung der Tangentialebene ist im Allgemeinen

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

(a) Wir benötigen zuerst die partiellen Ableitungen von f. Es ist

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2 - y^2} \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -\frac{2y}{x^2 - y^2},$$

die Gleichung der Tangentialebene lautet also

$$z = \ln(x_0^2 - y_0^2) + \frac{2x_0}{x_0^2 - y_0^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{x_0^2 - y_0^2}(y - y_0).$$

Parallel zur Ebene $\mathcal{E}$ ist die Tangentialebene, falls die Normalvektoren parallel sind. Der Normalvektor von $\mathcal{E}$ ist $(2, 1, -1)^t$, der der Tangentialebene ist $\big(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\big)^t$. Wir suchen also x_0, y_0 mit

$$f_x(x_0, y_0) = 2 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 1.$$

Aus

$$\frac{2x_0}{x_0^2 - y_0^2} = 2 \qquad \text{und} \qquad -\frac{2y_0}{x_0^2 - y_0^2} = 1$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

folgt

$$x_0 = x_0^2 - y_0^2 \qquad \text{und} \qquad -2y_0 = x_0^2 - y_0^2.$$

Insbesondere ist also $x_0 = -2y_0$. Setzen wir dies in eine der beiden Gleichungen ein, erhalten wir $-2y_0 = 3y_0^2$, also $y_0 = -\frac{2}{3}$. Daraus ergibt sich $x_0 = \frac{4}{3}$.

(b) Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_x(x, y) = e^x\big(1 + \ln(y)\big) \qquad \text{und} \qquad f_y(x, y) = \frac{1}{y}e^x,$$

die Gleichung der Tangentialebene ist daher

$$\begin{aligned} z &= e^{x_0}\big(1 + \ln(y_0)\big) + e^{x_0}\big(1 + \ln(y_0)\big)(x - x_0) + \frac{1}{y_0}e^{x_0}(y - y_0) \\ &= e^{x_0}\left(\ln(y_0)(x - x_0 + 1) + \frac{y}{y_0}\right). \end{aligned}$$

Der Normalvektor der x, y-Ebene ist $(0, 0, 1)^t$, damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss also

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

gelten. Allerdings ist f_y nie Null, also ist die Tangentialebene nirgends parallel zur x, y-Ebene.

(c) Die Gleichung der Tangentialebene wurde bereits im vorigen Aufgabenteil angegeben.

Der Normalvektor der Ebene $\mathcal{E}$ ist $(0, -1, 1)^t$. Damit der Normalvektor der Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 1$$

gelten. Achtung: Im Gegensatz zum ersten Aufgabenteil sind die z-Koordinaten der beiden Normalvektoren diesmal nicht identisch, sondern haben unterschiedliche Vorzeichen. Daher muss das Gleiche auch für die anderen Koordinaten gelten.

Aus

$$e^{x_0}\big(1 + \ln(y_0)\big) = 0$$

folgt $1 - \ln(y_0) = 0$, also $y_0 = e^{-1}$. Somit ist

$$\begin{aligned} & & \frac{1}{y_0}e^{x_0} &= 1 \\ &\iff & e^{x_0+1} &= 1 \\ &\iff & x_0 + 1 &= \ln(1) = 0 \\ &\iff & x_0 &= -1. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Gleichung der Tangentialebene für alle Punkte auf der Fläche. Wann ist die Tangentialebene parallel zur Ebene $\mathcal{E}$?

(a) $f(x,y) = xy^2e^{x+y}$, $\quad\mathcal{E}\colon\ x,y$-Ebene

(b) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $\quad\mathcal{E}\colon\ x+y-z=0$

(c) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $\quad\mathcal{E}\colon\ 2x-3y+z=0$

(d) $f(x,y) = \ln(x^2-y^2)$, $\quad\mathcal{E}\colon\ 2y-z=0$

(e) $f(x,y) = x^y$, $\quad\mathcal{E}\colon\ x,y$-Ebene

(f) $f(x,y) = x^2+xy+2y^2$, $\quad\mathcal{E}\colon\ -6x+4y+z=0$

(g) $f(x,y) = x^2e^{\frac{y}{x}}$, $\quad\mathcal{E}\colon\ x,y$-Ebene

(h) $f(x,y) = x^2y-3y$, $\quad\mathcal{E}\colon\ 4x+y-z=0$

Lösung: (a) Wie in der ersten Aufgabe müssen wir auch hier zuerst die partiellen Ableitungen berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} & f_x(x,y) = y^2e^{x+y} + xy^2e^{x+y} = (x+1)y^2e^{x+y} \\ \text{und} \qquad & f_y(x,y) = 2xye^{x+y} + xy^2e^{x+y} = x(y^2+2y)e^{x+y}. \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangentialebene lautet also

$$z = x_0y_0^2e^{x_0+y_0} + (x_0+1)y_0^2e^{x_0+y_0}(x-x_0) + x_0(y_0^2+2y_0)e^{x_0+y_0}(y-y_0).$$

Damit die Tangentialebene parallel zur x,y-Ebene ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0,y_0) = 0$$

gelten. Da $e^{x_0+y_0}$ nie Null ist, entspricht dies

$$(x_0+1)y_0^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x_0(y_0^2+2y_0) = 0.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x_0 = -1$ oder $y_0 = 0$. Im Fall $y_0 = 0$ ist automatisch auch die zweite Gleichung wahr. Im Fall $x_0 = -1$ muss $y_0^2 + 2y_0 = 0$ gelten, also $y_0 = 0$ oder $y_0 = -2$. Die gesuchten Punkte sind also alle Punkte der Form $(x_0, 0)$ sowie der Punkt $(-1,-2)$.

(b) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = -\sin(x+y) \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = -\sin(x+y),$$

die Gleichung der Tangentialebene ist also

$$z = \cos(x_0+y_0) - \sin(x_0+y_0)(x-x_0) - \sin(x_0+y_0)(y-y_0).$$

Der Normalvektor der Ebene $\mathcal{E}$ ist $(1,1,-1)^t$. Damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = 1 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0,y_0) = 1$$

gelten, also $-\sin(x_0+y_0) = 1$ beziehungsweise $\sin(x_0+y_0) = -1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_0 + y_0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Die Gleichung der Tangentialebene ist wie im vorigen Aufgabenteil

$$z = \cos(x_0+y_0) - \sin(x_0+y_0)(x-x_0) - \sin(x_0+y_0)(y-y_0).$$

Der Normalvektor der Ebene $\mathcal{E}$ ist $(2,-3,1)^t$. Damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = -2 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0,y_0) = 3$$

gelten. (Man beachte, dass die z-Koordinate des Normalvektors von $\mathcal{E}$ 1 und nicht -1 ist.)

Da aber die beiden partiellen Ableitungen identisch sind, können nie beide Gleichungen erfüllt sein. Also gibt es keinen Punkt, an dem die Tangentialebene parallel zu $\mathcal{E}$ ist.

(d) Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$z = \ln(x_0^2 - y_0^2) + \frac{2x_0}{x_0^2 - y_0^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{x_0^2 - y_0^2}(y - y_0)$$

wie in der ersten Aufgabe berechnet.

Der Normalvektor der Ebene $\mathcal{E}$ ist $(0,2,-1)^t$. Damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0,y_0) = 2$$

gelten, es ist also

$$\frac{2x_0}{x_0^2 - y_0^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad -\frac{2y_0}{x_0^2 - y_0^2} = 2.$$

Hieraus folgt $x_0 = 0$ und somit $\frac{2y_0}{y_0^2} = 2$, also $y_0 = 1$.

(e) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = yx^{y-1} \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = \ln(x)x^y,$$

die Gleichung der Tangentialebene ist also

$$z = x_0^{y_0} + y_0 x_0^{y_0-1}(x - x_0) + \ln(x_0)x_0^{y_0}(y - y_0).$$

Damit die Tangentialebene parallel zur x,y-Ebene ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$$

gelten, also

$$y_0 x_0^{y_0-1} = 0 \qquad \text{und} \qquad \ln(x_0)x_0^{y_0}.$$

Der Faktor $x_0^{y_0}$ ist nur dann Null, wenn $x_0 = 0$, dann ist aber der Logarithmus nicht definiert und somit existiert f_y nicht. Also muss $\ln(x_0)$ Null sein, was genau für $x_0 = 1$ der Fall ist. Aus der ersten Gleichung folgt $y_0 = 0$.

(f) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x,y) = 2x + y \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = x + 4y,$$

die Gleichung für die Tangentialebene lautet also

$$z = x_0^2 + x_0 y_0 + 2y_0^2 + (2x_0 + y_0)(x - x_0) + (x_0 + 4y_0)(y - y_0).$$

Der Normalvektor der Ebene ist $(-6,4,1)^t$. Damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0,y_0) = 6 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0,y_0) = -4$$

gelten (Achtung, Vorzeichen!), also

$$2x_0 + y_0 = 6 \qquad \text{und} \qquad x_0 + 4y_0 = -4.$$

Die einzige Lösung dieses Gleichungssystems ist $(x_0,y_0) = (4,-2)$.

(g) Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{\frac{y}{x}} + x^2 \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) e^{\frac{y}{x}} \\ &= (2x - y)e^{\frac{y}{x}} \\ \text{und} \qquad f_y(x,y) &= x^2 \frac{1}{x} e^{\frac{y}{x}} = xe^{\frac{y}{x}}. \end{aligned}$$

Damit die Tangentialebene parallel zur x, y-Ebene verläuft, muss

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

gelten, also

$$(2x_0 - y_0)e^{\frac{y_0}{x_0}} = 0 \qquad \text{und} \qquad x_0 e^{\frac{y_0}{x_0}} = 0.$$

Es folgt also $x_0 = y_0 = 0$.

(h) Die partiellen Ableitungen sind

$$f_x(x, y) = 2xy \qquad \text{und} \qquad f_y(x, y) = x^2 - 3,$$

die Gleichung der Tangentialebene ist also

$$z = x_0^2 y_0 - 3y_0 + 2x_0 y_0 (x - x_0) + (x_0^2 - 3)(y - y_0).$$

Der Normalvektor der Ebene $\mathcal{E}$ ist $(4, 1, -1)^t$. Damit die Tangentialebene hierzu parallel ist, muss

$$f_x(x_0, y_0) = 4 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 1$$

gelten, also

$$2x_0 y_0 = 4 \qquad \text{und} \qquad x_0^2 - 3 = 1.$$

Es ist also $x_0 = \pm 2$ und daher $y_0 = \pm 1$. Die gesuchten Punkte sind also $(2, 1)$ und $(-2, -1)$.

□