Formelsammlung, Klausur 1

Mathematik II, M, Übungen

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$	$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$
x^a, $(a \neq 0)$	ax^{a-1}	e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$
$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Determinanten

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte: Für jedes j ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}). \end{aligned}$$

A_{jk} entspricht hierbei A ohne j-te Zeile und k-te Spalte.
Invertierbarkeitskriterium: A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.
Cramersche Regel: Ist A eine invertierbare Matrix, dann hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ die Lösung

$$\frac{1}{\det(A)}(\det(A_1), \dots, \det(A_n))^t,$$

wobei A_i aus A entsteht, indem man die i-te Spalte durch $\vec{b}$ ersetzt.
Inverse von 2×2 Matrizen:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Basen und Koordinatentransformation

Vektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$, falls die Matrix $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ Rang n hat, also $\det(B) \neq 0$.

Transformationsmatrix: Die Transformationsmatrix von einer Basis B zu einer Basis C ist die Matrix

$$T = (B^{-1}C)^t.$$

Hat ein Punkt die Koordinaten $\vec{v}_B$ zur Basis B und $\vec{v}_C$ zur Basis C, dann gilt

$$\vec{v}_C = (T^t)^{-1}\vec{v}_B = C^{-1}B\vec{v}_B.$$

Kegelschnitte und Hauptachsentransformation

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Äquivalent ist

$$\vec{x}^t A\vec{x} + \vec{p}^t\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

Fall $\mathbf{det(A) \neq 0}$*:*

- Berechne $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$ und $C = \frac{1}{2}\vec{p}^t\vec{q} + f$.
- Die Substitution $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$ liefert die Gleichung
$$\vec{y}^t A\vec{y} + C = 0.$$
- Bestimme die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von A sowie je einen normierten Eigenvektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Wähle dabei die Vektoren so, dass in der Matrix $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ die Gleichung $s_{12} = -s_{21}$ gilt.
- Bestimme den Winkel φ, für den gilt
$$S = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$
- Die Substitution $\vec{y} = S\vec{z}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$
- Für die Lösungsmenge für $\vec{z}$ gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen	zwei Geraden durch den Ursprung
Alle Werte < 0 oder alle > 0	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen, C anderes Vorzeichen	Ellipse
$C \neq 0$ und λ_1, λ_2 unterschiedliche Vorzeichen	Hyperbel

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{z}$ um φ gedreht und um $\vec{q}$ verschoben.
Fall $\mathbf{det(A) = 0}$*:* Falls $A = 0$, ist die Lösungsmenge eine Gerade. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von A ist 0, berechne den anderen Eigenwert λ_1 und Eigenvektoren $\vec{v}_1$ zu λ_1 und $\vec{v}_2$ zum Eigenwert 0. Wähle dabei $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ so, dass in der Matrix $S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ die Gleichung $s_{12} = -s_{21}$ gilt.

- Berechne
$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^t \vec{p}.$$
- Bestimme den Drehwinkel φ wie im Fall $\det(A) \neq 0$.
- Die Substitution $\vec{x} = S\vec{y}$. liefert die Gleichung
$$\lambda_1 y_1^2 + g y_1 + h y_2 + f = 0$$
- Falls $h = 0$, dann gilt für die Lösungsmenge für $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	eine senkrechte Gerade
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei senkrechte Geraden

- Falls $h \neq 0$, dann ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ eine Parabel mit Scheitelpunkt $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^t$.

Die Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist die Lösungsmenge für $\vec{y}$ um φ gedreht.

Lineare Differentialgleichungen

Die allgemeine Lösung einer homogenen DGL
$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = 0 \qquad \text{ist}$$
$$y_H(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)} dx\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL
$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = f(x) \qquad \text{ist}$$
$$y_I(x) = s(x) \cdot \int \frac{f(x)}{b(x)s(x)} dx,$$
$$\text{mit } s(x) = \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)} dx\right).$$

Charakteristisches Polynom: Zu einer DGL
$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$
gibt es das charakteristische Polynom
$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0.$$

Allgemeine Lösung einer homogenen DGL: Ein Fundamentalsystem einer homogenen DGL ist gegeben durch die folgenden Funktionen:
- Für jede reelle Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}$, wobei k die Vielfachheit der Nullstelle ist, sowie
- Für jedes Paar komplexer Nullstellen $\alpha \pm \beta i$ des charakteristischen Polynoms die Funktionen $e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ und $e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, wobei k die Vielfachheit der Nullstellen ist.

Variation der Konstanten bei DGL zweiter Ordnung: Ist $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL
$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$
dann ist $y_I(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ eine Lösung der inhomogenen DGL
$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \qquad \text{wobei}$$
$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx \quad \text{und}$$
$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx.$$

Spezielle Ansätze:

Störfunktion	**Ansatz für $y_I(x)$**
$P(x)$	$Q(x)$
$e^{\lambda x}P(x)$	$e^{\lambda x}Q(x)$
$\sin(\alpha x)$ $\cos(\alpha x)$ $a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)$	$c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)$
$P(x)\sin(\alpha x)$ $P(x)\cos(\alpha x)$ $P(x)\sin(\alpha x) + Q(x)\cos(\alpha x)$	$R(x)\sin(\alpha x) + S(x)\cos(\alpha x)$
$ae^{\lambda x}\sin(\alpha x)$ $ae^{\lambda x}\cos(\alpha x)$ $e^{\lambda x}\big(a\sin(\alpha x) + b\cos(\alpha x)\big)$	$e^{\lambda x}\big(c\sin(\alpha x) + d\cos(\alpha x)\big)$

Hierbei sind $a, b, c, d, \lambda, \alpha$ Konstanten und $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ Polynome vom Grad m.
Ist λ, αi oder $\lambda + \alpha i$ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss der Ansatz mit x^k multipliziert werden.

Systeme von Differentialgleichungen

Homogene Systeme: Hat die $n \times n$ Matrix A ausschließlich Eigenwerte der Vielfachheiten 1 und 2, dann ist die allgemeine Lösung des homogenen Systems
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$
die Summe von
- $c_i e^{\lambda_i t}\vec{v}_i$ für jeden einfachen Eigenwert λ_i mit Eigenvektor $\vec{v}_i$,
- $e^{\lambda_i t}(a_i\vec{v}_i + b_i\vec{w}_i)$ für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$,
- $e^{\lambda_i t}(c_i t\vec{v}_i + \vec{w}_i)$ für jeden doppelten Eigenwert λ_i mit nur einem Eigenvektor $\vec{v}_i$. Dabei bezeichnet $\vec{w}_i$ die allgemeine Lösung von
$$(A - \lambda_i I_n)\vec{w} = \vec{v}_i.$$

Inhomogene Systeme: Bilden $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$
dann ist
$$\vec{x}_I(t) = \vec{X}\vec{c}(t)$$
eine Lösung des inhomogenen Systems
$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s},$$
wobei $\vec{X}$ die Matrix $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n)$ ist und $\vec{c}(t)$ durch
$$\dot{\vec{c}} = \vec{X}^{-1}\vec{s}$$
bestimmt wird.