

Übungen Mathematik II, M

Klausur 1, Lösungen (Gruppe B)

3.5.2013

1. Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & a^2 - 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ a - 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & a^2 - 7 & a - 1 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 4 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & a^2 - 6 & a - 4 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a^2 - 4 & a - 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Falls $a^2 - 4 \neq 0$, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Diese erhalten wir durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{aligned} (a^2 - 4)z &= a - 2 &\Rightarrow z &= \frac{a - 2}{a^2 - 4} = \frac{1}{a + 2} \\ \Rightarrow y + \frac{2}{a + 2} &= 2 &\Rightarrow y &= 2 - \frac{2}{a + 2} \\ \Rightarrow x - 2 + \frac{2}{a + 2} - \frac{1}{a + 2} &= 3 &\Rightarrow x &= 5 - \frac{1}{a + 2}. \end{aligned}$$

$a^2 - 4 = 0$ gilt genau für $a = -2$ und $a = 2$. Im ersten Fall lautet die letzte Gleichung $0 = -4$, es gibt also keine Lösung. (In der Sprache der Matrizen: Der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix ist größer als der Rang der Matrix.) Im Fall $a = 2$ ist das Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Hier müssen wir für z (alternativ kann man dies auch für y tun) eine Variable ansetzen. Wir setzen also $z = t$ und erhalten

$$\begin{aligned} y + 2t = 2 & \Rightarrow y = 2 - 2t \\ \Rightarrow x - 2 + 2t - t = 3 & \Rightarrow x = 5 - t. \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist also

$$\begin{aligned} & \text{leer,} && \text{falls } a = -2, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 5-t \\ 2-2t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, && \text{falls } a = 2, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 5 - \frac{1}{a+2} \\ 2 - \frac{2}{a+2} \\ \frac{1}{a+2} \end{pmatrix} \right\}, && \text{sonst.} \end{aligned}$$

□

2. Gegeben sind die Basen des \mathbb{R}^3

$$B = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Der Punkt \vec{x} habe die Koordinaten

$$\vec{x}_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis B . Welche Koordinaten hat er bezüglich der Basis C ?

Lösung: Für die Koordinaten bezüglich der Basis C gilt die Gleichung

$$\vec{x}_C = C^{-1}B\vec{x}_B.$$

Wir müssen also zuerst das Inverse der Matrix C berechnen.

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Inverse von C ist also $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Somit ist

$$\begin{aligned} \vec{x}_C &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -6 & 11 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{1}{x^2}e^{-2x}, \quad x > 0.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2.$$

Es hat also eine doppelte Nullstelle -2 . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet somit

$$y_H = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Nun müssen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmen. Die Störfunktion fällt nicht in einen der Typen in der Liste der speziellen Ansätze, also versuchen wir es mit Variation der Konstanten. Eine partikuläre Lösung ist demnach

$$y_I(x) = c_1(x)e^{-2x} + c_2(x)xe^{-2x},$$

wobei $c_1(x)$ und $c_2(x)$ durch

$$c_1(x) = - \int \frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x} \cdot xe^{-2x}}{W(x)} dx \quad \text{und} \quad c_2(x) = \int \frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x} \cdot e^{-2x}}{W(x)} dx.$$

gegeben sind. Hierbei ist $W(x)$ die Wronski-Determinante. Diese berechnen wir nun.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & (-2x+1)e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$$

Jetzt können wir c_1 und c_2 berechnen.

$$c_1(x) = - \int \frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x} \cdot xe^{-2x}}{e^{-4x}} dx = - \int \frac{1}{x} dx = -\ln(x)$$

$$\text{und} \quad c_2(x) = \int \frac{\frac{1}{x^2}e^{-2x} \cdot e^{-2x}}{e^{-4x}} dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$$

Wir haben also

$$y_I(x) = -\ln(x)e^{-2x} - e^{-2x} = -(\ln(x) + 1)e^{-2x}$$

und somit die allgemeine Lösung

$$y(x) = (c_1 - \ln(x) - 1)e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}. \quad \square$$

4. Bestimmen Sie diejenige Lösung des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & -5 & -4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t),$$

welche die Anfangsbedingung

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Lösung: Zunächst benötigen wir die Eigenwerte und -vektoren der Matrix. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -5-\lambda & -4 \\ 1 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2(-5-\lambda) - 16 - 32 \\ &\quad -(-48 + 16\lambda) - (-24 + 8\lambda) - (-20 - 4\lambda) \\ &= (9 - 6\lambda + \lambda^2)(-5 - \lambda) + 44 - 20\lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1. \end{aligned}$$

Die Nullstelle $\lambda_1 = 1$ sieht man leicht. Dann dividiert man das Polynom durch $(\lambda - 1)$ und erhält

$$-\lambda^3 + \lambda + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 1) = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Wir haben also einen doppelten Eigenwert 1 und einen einfachen Eigenwert -1 . Wir bestimmen nun die Eigenvektoren, zunächst zum Eigenwert 1, dann zum Eigenwert -1 .

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & -6 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Zum Eigenwert 1 sind also alle Eigenvektoren Vielfache von $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, zum

Eigenwert -1 sind sie Vielfache von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da der Eigenwert 1 Vielfachheit 2 hat, aber keine zwei linear unabhängige Eigenvektoren besitzt, müssen wir für die Lösung den Ansatz

$$\vec{x} = e^t \begin{pmatrix} at + b \\ ct + d \\ et + f \end{pmatrix}$$

wählen. Damit diese Funktion die Differentialgleichung erfüllt, muss $\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor sein, also

$$\begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 0 \\ -c_1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem muss

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & -6 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \\ e \end{pmatrix}$$

gelten. Wir lösen nun dieses Gleichungssystem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 2c_1 \\ -2 & -6 & -4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -c_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & c_1 \\ 0 & -2 & 0 & 2c_1 \\ 0 & 2 & 0 & -2c_1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die allgemeine Lösung hiervon ist

$$\begin{pmatrix} 3c_1 - 2c_2 \\ -c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$\vec{x} = e^t \begin{pmatrix} 3c_1 - 2c_2 \\ -c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 0 \\ -c_1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $t = 0$ ergibt sich der Wert

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 3c_1 - 2c_2 \\ -c_1 + c_3 \\ c_2 - c_3 \end{pmatrix}.$$

Damit die Anfangsbedingungen gelten, muss also

$$\begin{aligned} 3c_1 - 2c_2 &= 1 \\ -c_1 + c_3 &= 1 \\ c_2 - c_3 &= -2 \end{aligned}$$

gelten. Addieren wir die zweite und dritte Gleichung jeweils zweimal zur ersten, erhalten wir $c_1 = -1$. In die zweite Gleichung eingesetzt ergibt dies $c_3 = c_1 + 1 = 0$. Die dritte Gleichung liefert schließlich $c_2 = -2 + c_3 = -2$. Die gesuchte Lösung ist somit

$$\vec{x} = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□