Übungen Mathematik II, M

Klausur 2, Lösungen
(Gruppe B)

21.6.2013

1. Berechnen Sie zur Raumkurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \qquad t > 0$$

die Torsion und Krümmung zu einem allgemeinen Zeitpunkt t. Wie verhalten sich Torsion und Krümmung bei $t \to 0$ und $t \to \infty$?

Lösung: Wir berechnen zuerst die Ableitungen von $\vec{x}(t)$. Es ist

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \qquad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\tau = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right|^2}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2t^{\frac{1}{2}} \\ -t^{-\frac{1}{2}} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2t^{\frac{1}{2}} \\ -t^{-\frac{1}{2}} \\ 2 \end{pmatrix}\right|^2} = \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{4t + \frac{1}{t} + 4} = \frac{-1}{\sqrt{t}(2t+1)^2}$$

und

$$\kappa = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ t^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 2t^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\right|^3} = \frac{\sqrt{4t + \frac{1}{t} + 4}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 4t}^3} = \frac{\sqrt{4t^2 + 1 + 4t}}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{1 + 4t^2 + 4t}^3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t}(1 + 4t^2 + 4t)} = \frac{1}{\sqrt{t}(2t+1)^2}.$$

Für $t \to 0$ geht der Nenner von τ und κ offensichtlich gegen Null, daher geht die Torsion gegen $-\infty$ und die Krümmung gegen ∞. Für $t \to \infty$ geht der Nenner gegen ∞ und beide Werte somit gegen Null. $\square$

2. Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y,z) = \tan(5x)(z-2)^3 \ln(4y) - 4yz$$

am Punkt $P = (\frac{\pi}{20}, \frac{1}{4}, 1)^t$ in die Richtung des Vektors $\vec{v} = (2\sqrt{7}, 2, -7)^t$.

Lösung: Zuerst müssen wir den Gradienten berechnen. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= \frac{5(z-2)^3 \ln(4y)}{\cos^2(5x)}, \\ f_y(x,y,z) &= \frac{\tan(5x)(z-2)^3}{y} - 4z \\ \text{und} \qquad f_z(x,y,z) &= 3\tan(5x)(z-2)^2 \ln(4y) - 4y. \end{aligned}$$

Am gegebenen Punkt ist $\ln(4y) = \ln(1) = 0$, also ist dort $f_x = 0$ und $f_z = -4y = -1$. Die verbleibende partielle Ableitung ist $f_y = \frac{1\cdot(-1)^3}{\frac{1}{4}} - 4 = -8$.

Die Richtungsableitung in Richtung eines Vektors $\vec{r}$ der Länge 1 ist also $(0, -8, -1)^t \cdot \vec{r}$. Wir möchten $\vec{v}$ daher zuerst normieren. Die Länge von $\vec{v}$ ist

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 + 2^2 + (-7)^2} = \sqrt{28 + 4 + 49} = 9.$$

Die gesuchte Richtungsableitung ist somit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2\sqrt{7} \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{-16+7}{9} = -1. \qquad \square$$

3. Bestimmen Sie alle globalen Extremstellen der Funktion

$$f(x,y) = \sin(x) - \sin(y) - \sin(y-x)$$

im Gebiet $G = \{(x,y) \mid 0 \geq x \geq -\frac{\pi}{2} \text{ und } 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Lösung: Zunächst suchen wir die Kandidaten für die Extremstellen im Inneren von G. Der Gradient von f ist

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x) + \cos(y-x) \\ -\cos(y) - \cos(y-x) \end{pmatrix}.$$

Damit der Gradient Null ist, muss $\cos(y-x) = -\cos(x)$ und $\cos(y-x) = -\cos(y)$ gelten, insbesondere also $\cos(x) = \cos(y)$. Dies gilt in G nur für $x = y$ und $x = -y$. Ersteres kann aber nur für $x = y = 0$ der Fall sein und dann ist auch $x = -y$. Wir können also von $x = -y$ ausgehen.

Wir suchen daher ein $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos(2y) = -\cos(y)$. Allgemein gilt $\cos(a) = -\cos(b)$ genau für $a = \pi + b$ und $a = \pi - b$ sowie alle Verschiebungen um Vielfache von 2π. Im Fall $b = y$ liegt von diesen Werten nur $\pi - b$ im Intervall $[0, \pi]$, welches $2y$ enthält. Also muss $2y = \pi - y$ gelten und somit $y = \frac{\pi}{3}$. Unser einziger Kandidat für eine Extremstelle im Inneren von G ist also der Punkt $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

Nun betrachten wir den Rand von G. Dieser besteht aus vier Geradenabschnitten mit $x = 0$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$ beziehungsweise $y = \frac{\pi}{2}$. Für $x = 0$ ist $f(x, y) = -2\sin(y)$, was keine Extremstellen im Inneren von $[0, \frac{\pi}{2}]$ hat. Für $y = 0$ ist $f(x, y) = \sin(x) - \sin(-x) = 2\sin(x)$, was ebenfalls keine Extremstellen im Inneren von $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ hat.

Für $x = -\frac{\pi}{2}$ ist $f(x, y) = -1 - \sin(y) - \sin(y + \frac{\pi}{2})$. Die Ableitung hiervon nach y ist $-\cos(y) - \cos(y + \frac{\pi}{2})$, was nur dann Null ist, wenn $y + \frac{\pi}{2} = \pi - y$ und somit $y = \frac{\pi}{4}$. Ein weiterer Kandidat für eine Extremstelle ist also $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.

Für $y = \frac{\pi}{2}$ ist $f(x, y) = \sin(x) - 1 - \sin(\frac{\pi}{2} - x)$. Die Ableitung hiervon nach x ist $\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$, was nur dann Null ist, wenn $\frac{\pi}{2} - x = \pi + x$ und somit $x = -\frac{\pi}{4}$. Ein weiterer Kandidat für eine Extremstelle ist also $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

Hinzu kommen als mögliche Extremstellen noch die Ecken von G. Wir vergleichen nun die Funktionswerte an diesen Stellen.

(x, y)	$(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$	$(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$	$(0, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$f(x, y)$	$-\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$-1 - \sqrt{2}$	$-1 - \sqrt{2}$	0	-2	-2	-2
	≈ -2.598	≈ -2.414	≈ -2.414				

Wir haben somit ein globales Maximum bei $(0, 0)$ und ein globales Minimum bei $(\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3})$. □

4. Untersuchen Sie, ob die Differentialgleichung

$$2x^2yy' + xy^2 + xe^yy' - 1 = 0$$

exakt ist und lösen sie die Gleichung.

Lösung: Die Differentialgleichung ist von der Form

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

mit $P(x, y) = xy^2 - 1$ und $Q(x, y) = 2x^2y + xe^y$. Es ist $P_y(x, y) = 2xy$ und $Q_x(x, y) = 4xy + e^x$, die Differentialgleichung ist also nicht exakt.

Wir suchen nun einen integrierenden Faktor M. Für diesen muss $M \cdot (P_y - Q_x) = M \cdot (-2xy - e^x)$ entweder $M'Q = M' \cdot (2x^2y + xe^y)$ entsprechen (falls M von y abhängt) oder $-M'P = -M' \cdot (xy^2 - 1)$ (falls M von x abhängt). Ersteres ergibt die einfachere Gleichung, denn dann ist

$$\begin{aligned}
& M \cdot (-2xy - e^x) = M' \cdot (2x^2y + xe^y) \\
\iff \quad & \frac{M'}{M} = -\frac{1}{x} \\
\iff \quad & \int \frac{1}{M} dM = -\int \frac{1}{x} dx \\
\iff \quad & \ln|M| = -\ln|x| \\
\iff \quad & |M| = \frac{1}{|x|}.
\end{aligned}$$

Ein integrierender Faktor ist also $M = \frac{1}{x}$.
Mit diesem multipliziert ergibt sich die neue Differentialgleichung

$$y^2 - \frac{1}{x} + (2xy + e^y)\, y' = 0,$$

also eine exakte Differentialgleichung mit $P(x,y) = y^2 - \frac{1}{x}$ und $Q(x,y) = 2xy + e^y$. Wir erhalten $F(x,y)$, indem wir zuerst Q nach y integrieren.

$$F = \int 2xy + e^y dy = xy^2 + e^y + \Psi(x)$$

Da auch $F_x = P$ gelten soll, folgt

$$\begin{aligned} && y^2 + \Psi'(x) &= y^2 - \frac{1}{x} \\ \Longleftrightarrow && \Psi(x) &= -\ln(x). \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion F ist also

$$F(x,y) = xy^2 + e^y - \ln(x)$$

und die Lösung y der Differentialgleichung ist durch die Gleichung

$$xy^2 + e^y - \ln(x) = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ bestimmt. $\square$