Übungen Mathematik II, M

Nachklausur zu Klausur 1, Lösungen

30.9.2013

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 7 & 6 \\ 3 & -6 & 5 & 20 \\ -1 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 11 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wir lösen das Gleichungssystem mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & 7 & 6 & 11 \\ 3 & -6 & 5 & 20 & 11 \\ -1 & 2 & -6 & 2 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{llrr|r} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{lrlr|l} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Der Rang von A und $(A|b)$ ist identisch, also gibt es Lösungen. Da der Rang um 2 kleiner als die Anzahl der Variablen ist, können wir zwei Variablen frei wählen. Setzt man etwa $x_2 = s$ und $x_4 = t$, erhält man durch Rückwärtseinsetzen die allgemeine Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 + 2s - 10t \\ s \\ 1 + 2t \\ t \end{pmatrix}.$$

Andere Darstellungen der Lösung sind ebenfalls möglich. □

2. Ermitteln Sie zu dem Kegelschnitt

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

den Typ der Lösungsmenge sowie Drehwinkel und (falls existent) den Verschiebungsvektor.

Lösung: Die Vektorschreibweise des Kegelschnittes ist

$$\vec{x}^t \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -2 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} + 1 = 0.$$

Die Determinante der Matrix A ist Null, daher berechnet man gleich die Eigenwerte und -vektoren. Das charakteristische Polynom von A ist $\lambda^2 - 5\lambda = \lambda(\lambda-5)$, also sind die Eigenwerte 5 und 0. Die Eigenvektoren erhalten wir als Lösung der Gleichungen $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 1-5 & -2 & 0 \\ -2 & 4-5 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ \text{und} \qquad &\left(\begin{array}{cc|c} 1-0 & -2 & 0 \\ -2 & 4-0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist also $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^t$, zum Eigenwert 0 haben wir $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^t$. Die Drehmatrix ist somit

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Drehwinkel φ erfüllt $\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, also $\varphi = \pm 63.4349°$. Da auch $\sin(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{5}}$ gelten muss, ist $\varphi = -63.4349°$.

Nun berechnet man

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^t \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir befinden uns also im Fall $h = 0$. Da $g^2 - 4f\lambda_1 = (2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 0$, ist die Lösung eine senkrechte Gerade, gedreht um den Winkel φ. $\square$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 5y = 39 \sin(x) e^x.$$

Lösung: Die homogene Differentialgleichung hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 4\lambda + 5$ mit den Nullstellen $-2 \pm i$ und daher besteht das Fundamentalsystem aus $e^{-2x}\sin(x)$ und $e^{-2x}\cos(x)$.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir durch einen speziellen Ansatz. (Variation der Konstanten ist ebenfalls möglich, ergibt aber komplizierte Rechnungen.)

Der spezielle Ansatz lautet nach Tabelle $y_p = e^x(a\sin(x) + b\cos(x))$. Da $1+i$ (in der Störfunktion ist sowohl der Faktor in der Exponentialfunktion als auch der im Sinus 1) keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, können wir diesen Ansatz verwenden. Seine Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p' &= e^x(a\sin(x) + b\cos(x)) + e^x(a\cos(x) - b\sin(x)) \\ &= e^x((a-b)\sin(x) + (a+b)\cos(x)) \\ \text{und} \qquad y_p'' &= e^x((a-b)\sin(x) + (a+b)\cos(x)) \\ &\quad + e^x((a-b)\cos(x) - (a+b)\sin(x)) \\ &= e^x(-2b\sin(x) + 2a\cos(x)). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$\begin{aligned}39e^x\sin(x) &= y_p'' + 4y_p' + 5y_p\\ &= e^x((9a-6b)\sin(x) + (6a+9b)\cos(x)),\end{aligned}$$

also $9a - 6b = 39$ und $6a + 9b = 0$. Aus der zweiten Gleichung folgt $a = -\frac{3}{2}b$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, ergibt sich $-\frac{39}{2}b = 39$, also $b = -2$. Hieraus folgt $a = 3$.

Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y = e^{-2x}(c_1\sin(x) + c_2\cos(x)) + e^x(3\sin(x) - 2\cos(x)).$$

□

4. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0\\ -6 & 2 & 0\\ -15 & 0 & 2\end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix}0\\ e^{2t}\\ e^{3t}\end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0\\ -6 & 2-\lambda & 0\\ -15 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix} &= (5-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0\\ &= -(\lambda-5)(\lambda-2)^2.\end{aligned}$$

Für den Eigenwert 5 bestimmen wir den Eigenvektor:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0\\ -6 & -3 & 0 & 0\\ -15 & 0 & -3 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \longrightarrow \vec{v}_1 = c\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -5\end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 können wir ebenso bestimmen, allerdings sind die Eigenvektoren $(0,1,0)^t$ und $(0,0,1)^t$ auch direkt zu sehen. Das homogene System hat also das Fundamentalsystem

$$\vec{x}_1 = e^{5t}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ -5\end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = e^{2t}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

und die allgemeine Lösung $c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + c_3\vec{x}_3$.

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems. Dafür stellen wir die Matrix $\vec{X} = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ auf und bestimmen ihr Inverses:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{5t} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -2e^{5t} & e^{2t} & 0 & 0 & 1 & 0\\ -5e^{5t} & 0 & e^{2t} & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{5t} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & e^{2t} & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{2t} & 5 & 0 & 1\end{array}\right)\\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & e^{-5t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2e^{-2t} & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 5e^{-2t} & 0 & e^{-2t}\end{array}\right).\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir $\vec{c}$ als eine Lösung von $\dot{\vec{c}} = \vec{X}^{-1}\vec{s}$, wobei sich letzteres zu

$$\begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 & 0 \\ 2e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ 5e^{-2t} & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

ergibt. Also ist $\vec{c} = (0, t, e^t)^t$ eine Lösung und

$$\vec{x}_I = \vec{X}\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung ist

$$\vec{x} = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ te^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

□