Übungen Mathematik II, M

10. Übungsblatt

13.6.2013

1. Eine Kurve sei implizit durch

$$f(x,y) = -2 + 3x - x^3 + y^2 = 0$$

gegeben. Wo befinden sich singuläre Punkte, also Punkte mit $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$? Bestimmen Sie für alle anderen Punkte der Kurve die Gleichung der Tangente und skizzieren Sie die Kurve.

2. Eine Kurve sei implizit durch

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 0$$

gegeben. Bestimmen Sie alle singulären Punkte sowie alle Punkte mit horizontaler und vertikaler Tangente.

3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2 y + 3y - 2$$

in ein Taylorpolynom dritten Grades um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

4. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima von $f(x,y) = xy^2$ auf dem Gebiet

$$G = \{(x,y) \mid |x|, |y| \leq 1\}.$$

5. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Maxima und Minima von $f(x,y) = \ln(x+y) - \frac{x^3}{3} - y$ auf dem Gebiet

$$G = \left\{(x,y) \;\middle|\; x + y \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

6. Gegeben seien die Messwerte (x_k, y_k):

$$(1,3), (2,1), (3,4), (4,1), (5,5)$$

Bestimmen Sie diejenige Gerade $ax + b$, für welche die Summe $\sum_k \big(y_k - (ax_k + b)\big)^2$ der Fehlerquadrate minimal ist.

7. Finden Sie alle stationären Punkte der Funktion

$$f(x,y,z) = \cos(x) + \cos(y) + \cos(z)$$

und untersuchen Sie, ob es sich dabei um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

8. Finden Sie alle Maxima und Minima der Funktion $f(x,y,z) = z(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ auf dem Gebiet

$$G = \{(x,y,z) \mid z \neq 0\}.$$

Zusatzaufgabe für Interessierte: Wie kann man herausfinden, ob die stationären Punkte der Funktion aus Aufgabe 8 mit $z = 0$ Extrema oder Sattelpunkte sind?