Übungen Mathematik II, M

12. Übungsblatt

27.6.2013

1. Sei B der Bereich, der durch die Parabel $y = x^2$ und die Gerade $y = 1$ begrenzt wird. Beschreiben Sie B als Normalbereich bezüglich der x-Achse und als Normalbereich bezüglich der y-Achse und berechnen Sie so die Integrale

$$\iint_B x^2 y dx dy \qquad \text{und} \qquad \iint_B x^2 y dy dx.$$

2. Berechnen Sie die Doppelintegrale

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy \qquad \text{und} \qquad \int_{-1}^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \right) dx.$$

3. Eine Fläche im Raum sei durch $z = 2\sqrt{1-x^2} + \sqrt{3}y$ mit $x, y \geq 0$ und $x + y \leq 1$ definiert. Wie groß ist der Flächeninhalt?

4. Eine Fläche bestehe aus einer Halbkreisscheibe mit Radius a und einem Rechteck mit Kantenlängen $2a$ und b, die bündig aneinander anschließen. Welchen Wert (in Abhängigkeit von a) muss b haben, damit der Schwerpunkt der Fläche im Mittelpunkt des Kreises liegt?

5. Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ der Koordinatentransformation $u = xy$ und $v = \frac{y}{x}$. Verwenden Sie diese Transformation, um das Integral $\iint_B y^2 dx dy$ zu berechnen, wobei B der durch die Kurven $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{2}{x}$, $y = \frac{x}{2}$ und $y = 2x$ begrenzte Bereich ist.

6. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche (Radius R) und Höhe h bei Rotation um seine Längsachse. Die Dichte kann dabei als konstant $\rho = 1$ angenommen werden.

7. Bestimmen Sie die Masse der halbierten Kugelschale

$$2 \leq (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 \leq 3, \qquad z \geq 4,$$

wobei die Dichte des Körpers durch $\rho(x, y, z) = x + y + z$ gegeben ist.

8. Bestimmen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1,$$

indem Sie die Koordinatentransformation $x = ar \cdot \sin(\theta)\cos(\varphi)$, $y = br \cdot \sin(\theta)\sin(\varphi)$, $z = cr \cdot \cos(\theta)$ auf verallgemeinerte Kugelkoordinaten verwenden.

9. Berechnen Sie durch ein Kurvenintegral die Arbeit, welche ein Körper in der Zeit $0 \le t \le T$ verrichtet, der sich entlang der Schraubenlinie $\vec{x}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), t\big)^t$ in den folgenden Kraftfeldern bewegt.

$$\vec{K}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \\ -g \end{pmatrix}, \qquad \vec{K}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{K}_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix},$$

wobei g eine Konstante ist.