Übungen Mathematik II, M

2. Übungsblatt

14.3.2013

1. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3+a & 4 \\ 2 & 3a & 20+a \\ -3 & 3-5a & -33-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) genau eine Lösung

(b) keine Lösung

(c) unendlich viele Lösungen

Wählen Sie ein a, für das es genau eine Lösung gibt und bestimmen Sie diese.

2. Entscheiden Sie, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

3. Entscheiden Sie, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind und geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

4. Berechnen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Berechnen Sie die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Determinante und Adjunkte von A.

7. Für welche Werte von a ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

8. Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel.

9. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Wert von x_1 nach der Cramerschen Regel.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei M eine quadratische Matrix, die sich wie folgt unterteilen lässt:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline 0 & B \end{array}\right),$$

wobei A und B ebenfalls quadratisch (aber nicht unbedingt gleich groß) sind. Überlegen Sie sich, dass dann $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$ gilt.