

# Formelsammlung zur Vorlesungsprüfung

## Mathematik II, M

### Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte: Für jedes  $j$  ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj}). \end{aligned}$$

$A_{jk}$  entspricht hierbei  $A$  ohne  $j$ -te Zeile und  $k$ -te Spalte.  
*Invertierbarkeitskriterium:*  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$ .

*Cramersche Regel:* Ist  $A$  eine invertierbare Matrix, dann hat das Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$  die Lösung

$$\frac{1}{\det(A)} (\det(A_1), \dots, \det(A_n))^T,$$

wobei  $A_i$  aus  $A$  entsteht, indem man die  $i$ -te Spalte durch  $\vec{b}$  ersetzt.

*Inverse von  $2 \times 2$  Matrizen:*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

*Inverse von  $n \times n$  Matrizen:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^\# \quad \text{mit} \quad (A^\#)_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{kj}).$$

$A_{kj}$  entspricht hierbei  $A$  ohne  $k$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte.

### Basen und Koordinatentransformation

Vektoren  $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ , falls die Matrix  $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$  Rang  $n$  hat, also  $\det(B) \neq 0$ .

*Transformationsmatrix:* Die Transformationsmatrix von einer Basis  $B$  zu einer Basis  $C$  ist die Matrix

$$T = C^{-1}B.$$

Hat ein Punkt die Koordinaten  $\vec{v}_B$  zur Basis  $B$  und  $\vec{v}_C$  zur Basis  $C$ , dann gilt

$$\vec{v}_C = T\vec{v}_B.$$

### Kegelschnitte und Hauptachsentransformation

Die Gleichung

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

beschreibt einen Kegelschnitt. Äquivalent hierzu ist

$$\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{p}^T \vec{x} + f = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

### Fall $\det(A) \neq 0$ :

- Berechne  $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$  und  $C = \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} + f$ .
- Die Substitution  $\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$  liefert die Gleichung

$$\vec{y}^T A \vec{y} + C = 0.$$

- Bestimme die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  von  $A$  sowie normierte Eigenvektoren  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  zu  $\lambda_1$  und  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$  zu  $\lambda_2$ , wobei  $\beta_1 = -\alpha_2 \geq 0$  gelten sollte.
- Bestimme den Winkel  $\varphi$ , für den gilt

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

- Die Substitution  $\vec{y} = S\vec{z}$  liefert die Gleichung

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0.$$

- Für die Lösungsmenge für  $\vec{z}$  gilt

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2$ gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$ und $\lambda_1, \lambda_2$ verschiedene Vorz.	zwei Geraden durch $(0, 0)$ , Steigung $\pm \sqrt{\left  \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right }$
Alle gleiches Vorz.	$\emptyset$
$\lambda_1, \lambda_2$ gleiches Vorz., $C$ anderes Vorzeichen	Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{\left  \frac{C}{\lambda_1} \right }$ , $l_2 = \sqrt{\left  \frac{C}{\lambda_2} \right }$
$\lambda_1, \lambda_2$ versch. Vorz., $C, \lambda_1$ gleiches Vorz.	Hyperbel in 2. Hauptlage Scheitelpunkte $z_2 = \pm \sqrt{\left  \frac{C}{\lambda_2} \right }$
$\lambda_1, \lambda_2$ versch. Vorz., $C, \lambda_2$ gleiches Vorz.	Hyperbel in 1. Hauptlage Scheitelpunkte $z_1 = \pm \sqrt{\left  \frac{C}{\lambda_1} \right }$
beide vorigen Fälle	Asymptoten $z_2 = \pm \sqrt{\left  \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right } \cdot z_1$

Die Lösungsmenge für  $\vec{x}$  ist die Lösungsmenge für  $\vec{z}$  um  $\varphi$  gedreht und danach um  $\vec{q}$  verschoben.

### Fall $\det(A) = 0$ :

Falls  $A = 0$ , ist die Lösungsmenge eine Gerade, deren Lage von  $d, e, f$  abhängt. Ansonsten:

- Ein Eigenwert von  $A$  ist  $\lambda_2 = 0$ , berechne den anderen Eigenwert  $\lambda_1$  und Eigenvektoren  $\vec{v}_1$  zu  $\lambda_1$  und  $\vec{v}_2$  zu  $\lambda_2$ . Wähle dabei  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  wie im Fall  $\det(A) \neq 0$ .
- Berechne

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^T \vec{p}.$$

- Bestimme den Drehwinkel  $\varphi$  wie im Fall  $\det(A) \neq 0$ .

- Die Substitution  $\vec{x} = S\vec{y}$  liefert die Gleichung

$$\lambda_1 y_1^2 + g y_1 + h y_2 + f = 0.$$

- Falls  $h = 0$ , dann gilt für die Lösungsmenge für  $\vec{y}$

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	Gerade $y_1 = -\frac{g}{2\lambda_1}$
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei Geraden $y_1 = -\frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4f\lambda_1}}{2\lambda_1}$

- Falls  $h \neq 0$ , dann ist die Lösungsmenge für  $\vec{y}$  eine Parabel mit Scheitelpunkt  $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^T$ , geöffnet nach rechts, falls  $\frac{h}{\lambda_1} < 0$ , ansonsten nach links geöffnet.

Die Lösungsmenge für  $\vec{x}$  ist die Lösungsmenge für  $\vec{y}$  um  $\varphi$  gedreht.

### Lineare Differentialgleichungen

Die allg. Lösung einer homogenen DGL 1. Ordnung

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = 0 \quad \text{ist}$$

$$y_H(x) = C \cdot \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)} dx\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Variation der Konstanten:

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$a(x)y(x) + b(x)y'(x) = f(x) \quad \text{ist}$$

$$y_I(x) = s(x) \cdot \int \frac{f(x)}{b(x)s(x)} dx,$$

$$\text{mit } s(x) = \exp\left(-\int \frac{a(x)}{b(x)} dx\right).$$

Charakteristisches Polynom: Zu einer DGL

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

gibt es das charakteristische Polynom

$$a_n \lambda^n + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Allg. Lösung einer homogenen DGL mit konstanten Koeffizienten: Ein Fundamentalsystem einer homogenen DGL ist gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jede reelle Nullstelle  $\lambda$  des charakteristischen Polynoms die Funktionen  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ , wobei  $k$  die Vielfachheit der Nullstelle ist, sowie
- für jedes Paar komplexer Nullstellen  $\alpha \pm \beta i$  des charakteristischen Polynoms die Funktionen  $e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$  und  $e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ , wobei  $k$  die Vielfachheit der Nullstellen ist.

Variation der Konstanten bei DGL zweiter Ordnung: Ist  $y_H(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

dann ist  $y_I(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$  eine Lösung der inhomogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad \text{wobei}$$

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)y_2(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx \quad \text{und}$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)} dx.$$

Spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen:

Störfunktion	Ansatz für $y_I(x)$	Nullst.?
$P(x)$	$Q(x)$	0
$e^{\alpha x} P(x)$	$e^{\alpha x} Q(x)$	$\alpha$
$P(x) \sin(\beta x),$ $Q(x) \cos(\beta x)$ oder gemischt	$R(x) \sin(\beta x) + S(x) \cos(\beta x)$	$\beta i$
$ae^{\alpha x} \sin(\beta x),$ $ae^{\alpha x} \cos(\beta x)$ oder gemischt	$e^{\alpha x} (c \sin(\beta x) + d \cos(\beta x))$	$\alpha + \beta i$

Der Grad der Polynome im speziellen Ansatz ist so groß wie der größte Grad der Polynome in der Störfunktion. Ist 0,  $\alpha$ ,  $\beta i$  oder  $\alpha + \beta i$  eine  $k$ -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss der Ansatz mit  $x^k$  multipliziert werden.

### Systeme von Differentialgleichungen

Homogene Systeme: Hat die  $n \times n$  Matrix  $A$  ausschließlich Eigenwerte der Vielfachheiten 1 und 2, dann ist ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

gegeben durch die folgenden Funktionen:

- Für jeden einfachen Eigenwert  $\lambda_i$  mit Eigenvektor  $\vec{v}_i$  die Funktion  $e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$ ,
- für jeden doppelten Eigenwert  $\lambda_i$  mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren  $\vec{v}_i, \vec{w}_i$  die Funktionen  $e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$  und  $e^{\lambda_i t} \vec{w}_i$ ,
- für jeden doppelten Eigenwert  $\lambda_i$ , für den es keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren gibt, die Funktionen  $e^{\lambda_i t} \vec{v}_i$  und  $e^{\lambda_i t} (t\vec{v}_i + \vec{w}_i)$ , wobei  $\vec{v}_i$  ein Eigenvektor zu  $\lambda_i$  ist und  $\vec{w}_i$  ein Vektor mit

$$(A - \lambda_i I_n) \vec{w}_i = \vec{v}_i.$$

Inhomogene Systeme: Bilden  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  ein Fundamentalsystem des homogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x},$$

dann ist

$$\vec{x}_I(t) = \vec{Y}(t) \vec{c}(t)$$

eine Lösung des inhomogenen Systems

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s},$$

wobei  $\vec{Y}(t)$  die Matrix  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  ist und  $\vec{c}(t)$  durch

$$\dot{\vec{c}} = \vec{Y}(t)^{-1} \vec{s}$$

bestimmt wird.

## Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameterdarstellung
Kreis	$x^2 + y^2 = R^2$	$x(t) = R \cos(t)$ $y(t) = R \sin(t)$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a \cos(t)$ $y(t) = b \sin(t)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = \pm a \cosh(t)$ $y(t) = b \sinh(t)$

Tangente:  $\dot{\vec{v}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$ . Singulärer Punkt: Tangente  $\vec{0}$ .

Bogenlänge:  $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

In Polarkoordinaten:  $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$

Krümmung:

$$\kappa = \frac{\text{Parameterdarstellung}}{\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}} \quad \text{Falls } y = y(x) \quad \kappa = \frac{1}{|y''|} \frac{1}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius  $\frac{1}{\kappa(P)}$  und Mittelpunkt  $(\xi, \eta)$  berührt Kurve in  $P$  und hat Krümmung  $\kappa$ .

$$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

in Parameterdarstellung. Falls  $y = y(x)$ , dann

$$\xi = x - \frac{(1 + (y')^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise  
Überstrichener Flächeninhalt:

$$\text{Parameterdarstellung} \quad A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt \quad \text{Polarkoordinaten} \quad A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi$$

## Raumkurven

Bogenlänge:  $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} dt$

Tangentenvektor  $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Hauptnormalvektor  $\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} = \frac{\ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t} \right\rangle \vec{t}}{\left| \ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t} \right\rangle \vec{t} \right|} = \vec{b} \times \vec{t}$

Binormalvektor  $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\left| \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \right|} = \vec{t} \times \vec{n}$

Krümmung:  $\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

Torsion:  $\tau = - \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = \frac{\left\langle \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \right\rangle}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$

## Differentialrechnung in mehreren Variablen

Tangentialebene von  $f(x, y)$  im Punkt  $(x_0, y_0)$ :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Richtungsableitung in Richtung  $\vec{r}$  (mit  $|\vec{r}| = 1$ ):  $\langle \nabla f, \vec{r} \rangle$ .

Divergenz: Für  $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  ist  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ .

Für  $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$  ist  $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ .

$(x, y, z)$  ist *Quelle*, falls  $\text{div } \vec{v}(x, y, z) > 0$ , und *Senke*, falls  $\text{div } \vec{v}(x, y, z) < 0$ . Keine Quellen oder Senken: *quellenfrei*.

Rotation:  $\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ . Das Feld heißt *wirbelfrei*,

falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

## Implizite Funktionen

Kurve in impliziter Form:  $K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$ .

Singulärer Punkt auf  $K$ :  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ .

Tangente horizontal:  $f_x(x_0, y_0) = 0$  und  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Tangente vertikal:  $f_y(x_0, y_0) = 0$  und  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ .

Tangentengleichung allgemein:

$$y = y_0 - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0), \quad \text{falls } f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

$$x = x_0, \quad \text{falls } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

## Extremwertaufgaben

Hesse-Matrix  $H_f$  *positiv definit*, falls alle Eigenwerte positiv, *negativ definit*, falls alle Eigenwerte negativ, *indefinit*, falls positive und negative Eigenwerte.

Hauptminor  $\Delta_k$  von  $H_f$ : Determinante der linken oberen  $k \times k$  Teilmatrix.

Kriterium für Definitheit:  $H_f$  positiv definit  $\Leftrightarrow$  alle Hauptminoren positiv.  $H_f$  negativ definit  $\Leftrightarrow \Delta_k > 0$  für gerades  $k$  und  $\Delta_k < 0$  für ungerades  $k$ .

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist der Gradient Null.

Hinreichende Bedingung für Extrema: Eine Stelle mit Gradient Null ist ein Maximum, falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, ein Minimum, falls  $H_f$  positiv definit ist, und ein Sattelpunkt, falls  $H_f$  indefinit ist.

Randextrema:

- Ist  $(x_0, y_0)$  ein Maximum von  $f$  auf dem Rand des Gebietes  $G$ , so ist  $(x_0, y_0)$  genau dann ein Maximum auf  $G$ , falls der Gradient bei  $(x_0, y_0)$  von  $G$  weg zeigt.
- Ist  $(x_0, y_0)$  ein Minimum von  $f$  auf dem Rand von  $G$ , so ist  $(x_0, y_0)$  genau dann ein Minimum auf  $G$ , falls der Gradient bei  $(x_0, y_0)$  nach  $G$  hinein zeigt.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.

Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

## Extrema unter Nebenbedingungen

Ein Extremum von  $f(x, y)$  unter der Bedingung  $g(x, y) = 0$  erfüllt für  $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$  stets  $\nabla F = 0$ .

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bernoullische DGL:  $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$  mit  $\alpha \neq 0, 1$

- Multipliziere mit  $y^{-\alpha}$  und substituiere  $z = y^{1-\alpha}$ .
- Bestimme die Lösung von  $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = -g(x)$ .
- Lösung der ursprünglichen DGL ist  $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$  und für positives  $\alpha$  auch  $y = 0$ .

*Riccatische DGL:*  $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde eine partikuläre Lösung  $y_p$  (z.B. durch Ansatz  $y = ax^b$  oder  $y = ae^{bx}$ ) und substituiere  $y = z + y_p$ .
- Bestimme die Lösung von  $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$  und setze dies in  $y = z + y_p$  ein.

*Exakte DGL:*  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  heißt *exakt*, falls  $P_y = Q_x$ . Es gibt dann eine Funktion  $F(x, y)$ , so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung  $F(x, y) = c$  beschrieben wird. Man findet  $F$  wie folgt.

- Setze  $F = \int P dx + \Phi(y)$  und berechne  $\Phi$  aus der Bedingung  $F_y = Q$  oder
- setze  $F = \int Q dy + \Psi(x)$  und berechne  $\Psi$  aus der Bedingung  $F_x = P$ .

*Integrierender Faktor:* Ist  $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$  nicht exakt, suche eine Funktion  $M(x)$  oder  $M(y)$  mit

$$M \cdot (P_y - Q_x) = M_x Q \quad \text{bzw.} \quad M \cdot (P_y - Q_x) = -M_y P.$$

Die DGL  $MP(x, y) + MQ(x, y)y' = 0$  ist dann exakt.

*Clairautsche DGL:*  $y = xy' + h(y')$  hat die Lösungen  $y = cx + h(c)$  für  $c \in \mathbb{R}$ . Einhüllende der Lösungen ist die Kurve  $(x, y) = (-h'(z), -h'(z)z + h(z))$ .

*DGL zweiter Ordnung:*

- $y'' = f(x) \implies y = \int (\int f(x) dx) dx + c_1 x + c_2$
- $y'' = f(x, y') \rightsquigarrow$  substituiere  $z = y'$
- $y'' = f(y, y') \rightsquigarrow$  Löse die DGL  $z' \cdot z = f(y, z)$ . Löse dann die DGL  $y' = z(y)$ .

*Eulersche DGL:*  $a_3 x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$ .

Substituiere  $x = e^t$  und  $v(t) = y(e^t)$ . Dann ist

$$y'(x) = e^{-t} \cdot \dot{v}(t),$$

$$y''(x) = e^{-2t} \cdot (\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)),$$

$$\text{und} \quad y'''(x) = e^{-3t} \cdot (\dddot{v}(t) - 3\ddot{v}(t) + 2\dot{v}(t)).$$

## Mehrfachintegrale

*Normalbereich:* Ein Bereich der Form

$$B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

heißt Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse. Das Integral einer Funktion  $f(x, y)$  über  $B$  ist dann

$$\int_a^b \left( \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Für einen Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse

$$B = \{(x, y) \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

ist das Integral entsprechend

$$\int_a^b \left( \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

*Masse und Schwerpunkt:* Eine Fläche  $B$  in der  $x, y$  Ebene mit Dichtefunktion  $\rho(x, y)$  hat

$$\text{Gesamtmasse} \quad M = \iint_B \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Stat. Moment zur } x\text{-Achse} \quad M_x = \iint_B y \cdot \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Stat. Moment zur } y\text{-Achse} \quad M_y = \iint_B x \cdot \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Schwerpunkt} \quad S = \left( \frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$$

*Oberflächeninhalt:* Die Fläche, die eine Funktion  $f(x, y)$  über einem Bereich  $B$  definiert, hat den Inhalt

$$O = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

*Masse und Schwerpunkt:* Ein Bereich  $B$  im Raum mit Dichtefunktion  $\rho(x, y, z)$  hat

$$\text{Gesamtmasse} \quad M = \iiint_B \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{Schwerpunkt} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \quad x_s = \frac{\iiint_B x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

$$y_s = \frac{\iiint_B y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

$$z_s = \frac{\iiint_B z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

*Trägheitsmoment:*

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } x\text{-Achse}$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } z\text{-Achse}$$

*Polarkoordinaten:* Für  $x(r, \varphi) = r \cos(\varphi)$ ,  $y(r, \varphi) = r \sin(\varphi)$  und  $g(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$  gilt

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_B r \cdot g(r, \varphi) dr d\varphi.$$

*Kugelkoordinaten:* Für  $x(r, \varphi, \theta) = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$ ,  $y(r, \varphi, \theta) = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$ ,  $z(r, \varphi, \theta) = r \cos(\theta)$  und  $g(r, \varphi, \theta) = f(x(r, \varphi, \theta), y(r, \varphi, \theta), z(r, \varphi, \theta))$  gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B r^2 \sin(\theta) \cdot g(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta.$$

*Zylinderkoordinaten:* Für  $x(r, \varphi, z) = r \cos(\varphi)$ ,  $y(r, \varphi, z) = r \sin(\varphi)$ ,  $z(r, \varphi, z) = z$  und  $g(r, \varphi, z) = f(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z))$  gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B r \cdot g(r, \varphi, z) dr d\varphi dz.$$

*Kurvenintegrale:* Das Integral über ein Vektorfeld

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve  $\vec{x}(t)$  ist definiert als

$$\int \langle \vec{K}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle dt.$$

*Oberflächenintegrale:* Ist  $\vec{K}$  ein Vektorfeld und  $F$  ein Flächenstück, dann ist das Integral von  $\vec{K}$  auf  $F$

$$\iint_B \left\langle \vec{K}(x, y, f(x, y)), \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx dy,$$

wenn  $F$  in der Form  $z = f(x, y)$  mit  $(x, y) \in B$  gegeben ist und

$$\iint_B \langle \vec{K}(\vec{x}(u, v)), \vec{x}_u \times \vec{x}_v \rangle du dv,$$

wenn  $F$  in Parameterform  $\vec{x}(u, v)$  gegeben ist.