Tutorium Mathematik II, M

27. März 2015

***Aufgabe 1.** Welcher Kegelschnitt wird durch die Gleichung

$$2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 = 4$$

beschrieben?

Aufgabe 2. Welche Kegelschnitte werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben?

$$\begin{aligned}
3x_1^2 + 11x_2^2 - 6x_1x_2 + 6x_1 + 10x_2 &= -5 \\
2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2 + 4x_1 - 4x_2 &= -2 \\
6x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_1x_2 - 9x_1 + 6x_2 &= 0 \\
x_1^2 + 6x_2^2 + 12x_1x_2 + 10x_1 &= -5 \\
3x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 2x_1 + 1x_2 &= 1
\end{aligned}$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

$$\vec{x}^T A\vec{x} + \vec{p}^T\vec{x} + f = 0 \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ und } \vec{p} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}.$$

$\det(A) \neq 0$:

- $\vec{q} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{p}$, $C = \frac{1}{2}\vec{p}^T\vec{q} + f \quad \longrightarrow \quad \vec{y}^T A\vec{y} + C = 0$ ($\vec{x} = \vec{y} + \vec{q}$).
- EW λ_1, λ_2 von A und **normierte** EV $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ mit $\beta_1 = -\alpha_2 \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + C = 0$ ($\vec{y} = S\vec{z}, S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$).
- Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ mit S Drehmatrix um φ.

Koeffizienten	Lösungsmenge
$C = 0$, λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen	$\{0\}$
$C = 0$, λ_1, λ_2 verschiedene Vorz.	zwei Geraden durch $(0,0)$, Steigung $\pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right\rvert}$
Alle Werte < 0 oder alle > 0	$\emptyset$
λ_1, λ_2 gleiches Vorzeichen, C anderes Vorzeichen	Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$, $l_2 = \sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
$C \neq 0$, λ_1, λ_2 verschiedene Vorz. C, λ_1 gleiches Vorz.	Hyperbel 2. HL Scheitelpunkte $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_2}\right\rvert}$
$C \neq 0$, λ_1, λ_2 verschiedene Vorz. C, λ_2 gleiches Vorz.	Hyperbel 1. HL Scheitelpunkte $z_1 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{C}{\lambda_1}\right\rvert}$
beide vorigen Fälle	Asymptoten $z_2 = \pm\sqrt{\left\lvert\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right\rvert} z_1$

Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist um φ gedreht und um $\vec{q}$ verschoben.

$\det(A) = 0$: $A = 0 \Longrightarrow$ Lösungsmenge ist Gerade. Sonst:

- EW $\lambda_1 \neq 0$ und $\lambda_2 = 0$ von A, dann EV, S und φ wie oben.
- $\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = S^T\vec{p} \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 y_1^2 + g y_1 + h y_2 + f = 0$ ($\vec{x} = S\vec{y}$).
- $h = 0$:

Koeffizienten	Lösungsmenge
$g^2 - 4f\lambda_1 < 0$	$\emptyset$
$g^2 - 4f\lambda_1 = 0$	Gerade $y_1 = -\frac{g}{2\lambda_1}$
$g^2 - 4f\lambda_1 > 0$	zwei Geraden $y_1 = -\frac{g \pm \sqrt{g^2 - 4f\lambda_1}}{2\lambda_1}$

- $h \neq 0$: Lösungsmenge ist Parabel mit Scheitelp. $\left(-\frac{g}{2\lambda_1}, \frac{g^2}{4\lambda_1 h} - \frac{f}{h}\right)^T$. $\frac{h}{\lambda_1} < 0 \Longrightarrow$ nach rechts geöffnet; $\frac{h}{\lambda_1} > 0 \Longrightarrow$ nach links geöffnet.

Lösungsmenge für $\vec{x}$ ist um φ gedreht.

Lösung von Aufgabe 2

Der erste Kegelschnitt ist eine Ellipse mit Achsenlängen $l_1 = \sqrt{3}$ und $l_2 = \sqrt{1/2}$, gedreht um $18,43°$ bzw. $0,3218$ (Bogenmaß) und verschoben um $(-2,-1)^T$.

Der zweite Kegelschnitt besteht nur aus dem Punkt $(-1,0)^T$.

Der dritte Kegelschnitt ist eine Hyperbel in 2. Hauptlage mit Scheitelpunkten $z_2 = \pm\sqrt{3/2}$ und Asymptoten $z_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{7}}z_1$, gedreht um $18,43°$ bzw. $0,3218$ (Bogenmaß) und verschoben um $(0,3/2)^T$.

Der vierte Kegelschnitt besteht aus zwei Geraden durch den Ursprung mit Steigung $\sqrt{\frac{10}{3}}$, gedreht um $56,81°$ bzw. $0,9828$ (Bogenmaß).

Der letzte Kegelschnitt ist eine Parabel mit Scheitelpunkt $(-1/4\sqrt{2}, -5/8\sqrt{2})^T$, die nach rechts geöffnet ist, gedreht um $45°$ bzw. $\pi/4$ (Bogenmaß).