Tutorium Mathematik II, M

5. Juni 2015

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktion

$$f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 - 6y + 18$$

auf dem Gebiet

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\big|\; |x| + |y| \leq 2\big\}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Extremstellen der Funktionen

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 \qquad \text{und} \qquad g(x, y) = x(x^2 + y^2 - 7)$$

auf den Gebieten

$$B_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\big|\; x^2 + y^2 \leq 4\big\}$$

und

$$B_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\big|\; x + y \leq 1\big\}.$$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

Die Funktion f besitzt auf B_1 ein lokales (sogar globales) Minimum im Punkt $(1,0)$ und ein lokales (sogar globales) Maximum im Punkt $(-2,0)$. Dies sind die einzigen Extremstellen: Der Punkt $(2,0)$ ist zwar auf dem Rand von B_1 ein Minimum, aber nicht auf ganz B_1, weil der Gradient dort aus B_1 heraus gerichtet ist.

Auf B_2 besitzt f keine inneren Extremstellen. Der Punkt $(1,0)$ liegt auf dem Rand von B_2 und ist weiterhin ein Minimum (sogar ein globales Minimum). Weitere Extremstellen gibt es nicht.

Die Funktion g hat auf B_1 ein lokales Minimum in $(\sqrt{7/3},0)$ und ein lokales Maximum in $(-\sqrt{7/3},0)$. Weitere Kandidaten für innere Extremstellen gibt es nicht. Auf dem Rand von B_1 liegt in $(2,0)$ ein Minimum und in $(-2,0)$ ein Maximum, beides sind aber keine Extremstellen auf B_1, weil der Gradient am Punkt $(2,0)$ aus B_1 heraus und am Punkt $(-2,0)$ nach B_1 hinein gerichtet ist.

Auf B_2 besitzt g ein lokales Maximum in $(-\sqrt{7/3},0)$. Der einzige weitere Kandidat für eine innere Extremstelle ist $(0,-\sqrt{7})$ – dort liegt ein Sattelpunkt vor. Auf dem Rand von B_2 liegt in $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3},\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$ ein lokales Minimum und in $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3},\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)$ ein lokales Maximum. An beiden Punkten ist der Gradient nach B_2 hinein gerichtet, also liegt in $\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3},\frac{2-\sqrt{10}}{3}\right)$ tatsächlich ein lokales Minimum auf B_2 vor, in $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3},\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)$ allerdings keine Extremstelle.