

Formelsammlung, Klausur 2

Mathematik II, M, Übungen

Ebene Kurven

	Kartesische Koordinaten	Parameterdarstellung
Kreis	$x^2 + y^2 = R^2$	$x(t) = R \cos(t)$ $y(t) = R \sin(t)$
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = a \cos(t)$ $y(t) = b \sin(t)$
Hyperbel	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x(t) = \pm a \cosh(t)$ $y(t) = b \sinh(t)$

Tangente: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$. *Singulärer Punkt:* Tangente $\vec{0}$.

Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$

In Polarkoordinaten: $s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}(\varphi)^2 + r(\varphi)^2} d\varphi$

Krümmung:

Parameterdarstellung	Falls $y = y(x)$
$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\kappa = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}$

Krümmungskreis: Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa(P)}$ und Mittelpunkt (ξ, η) berührt Kurve in P und hat Krümmung κ .

$$\xi = x - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\dot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

in Parameterdarstellung. Falls $y = y(x)$, dann

$$\xi = x - \frac{(1 + (y')^2)y'}{y''} \quad \text{und} \quad \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Evolute: Menge der Mittelpunkte der Krümmungskreise
Überstrichener Flächeninhalt:

Parameterdarstellung	Polarkoordinaten
$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y) dt$	$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 d\varphi$

Raumkurven

Bogenlänge: $s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} dt$

Tangentenvektor $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$

Hauptnormalvektor $\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{t}}{ds}}{\left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|} = \frac{\ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t} \right\rangle \vec{t}}{\left| \ddot{\vec{x}} - \left\langle \ddot{\vec{x}}, \vec{t} \right\rangle \vec{t} \right|} = \vec{b} \times \vec{t}$

Binormalvektor $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{\left| \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \right|} = \vec{t} \times \vec{n}$

Krümmung: $\kappa = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right| = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$

Torsion: $\tau = - \left\langle \frac{d\vec{b}}{ds}, \vec{n} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \frac{d\vec{n}}{ds} \right\rangle = \frac{\left\langle \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}} \right\rangle}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}$

Differentialrechnung in mehreren Variablen

Tangentialebene von $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) :

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Richtungsableitung in Richtung \vec{r} (mit $|\vec{r}| = 1$): $\langle \nabla f, \vec{r} \rangle$.

Divergenz: Für $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ ist $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

Für $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ ist $\text{div } \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

(x, y, z) ist *Quelle*, falls $\text{div } \vec{v}(x, y, z) > 0$, und *Senke*, falls $\text{div } \vec{v}(x, y, z) < 0$. Keine Quellen oder Senken: *quellenfrei*.

Rotation: $\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$. Das Feld heißt *wirbelfrei*,

falls die Rotation überall dem Nullvektor entspricht.

Implizite Funktionen

Kurve in impliziter Form: $K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$.

Singulärer Punkt auf K : $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Tangente horizontal: $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Tangente vertikal: $f_y(x_0, y_0) = 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$.

Tangentengleichung allgemein:

$$y = y_0 - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0), \quad \text{falls } f_y(x_0, y_0) \neq 0$$

$$x = x_0, \quad \text{falls } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Extremwertaufgaben

Hesse-Matrix H_f *positiv definit*, falls alle Eigenwerte positiv, *negativ definit*, falls alle Eigenwerte negativ, *indefinit*, falls positive und negative Eigenwerte.

Hauptminor Δ_k von H_f : Determinante der linken oberen $k \times k$ Teilmatrix.

Kriterium für Definitheit: H_f positiv definit \Leftrightarrow alle Hauptminoren positiv. H_f negativ definit $\Leftrightarrow \Delta_k > 0$ für gerades k und $\Delta_k < 0$ für ungerades k .

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist der Gradient Null.

Hinreichende Bedingung für Extrema: Eine Stelle mit Gradient Null ist ein Maximum, falls die Hesse-Matrix negativ definit ist, ein Minimum, falls H_f positiv definit ist, und ein Sattelpunkt, falls H_f indefinit ist.

Randextrema:

- Ist (x_0, y_0) ein Maximum von f auf dem Rand des Gebietes G , so ist (x_0, y_0) genau dann ein Maximum auf G , falls der Gradient bei (x_0, y_0) von G weg zeigt.
- Ist (x_0, y_0) ein Minimum von f auf dem Rand von G , so ist (x_0, y_0) genau dann ein Minimum auf G , falls der Gradient bei (x_0, y_0) nach G hinein zeigt.

Ein Gebiet heißt *kompakt*, falls es beschränkt ist und jeden seiner Randpunkte enthält.

Eine stetige Funktion hat auf einem kompakten Gebiet stets ein globales Maximum und ein globales Minimum.

Extrema unter Nebenbedingungen

Ein Extremum von $f(x, y)$ unter der Bedingung $g(x, y) = 0$ erfüllt für $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ stets $\nabla F = 0$.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Bernoullische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0$ mit $\alpha \neq 0, 1$

- Multipliziere mit $y^{-\alpha}$ und substituiere $z = y^{1-\alpha}$.
- Bestimme die Lösung von $\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z = -g(x)$.
- Lösung der ursprünglichen DGL ist $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ und für positives α auch $y = 0$.

Riccatische DGL: $y' + f(x)y + g(x)y^2 = h(x)$

- Finde eine partikuläre Lösung y_p (z.B. durch Ansatz $y = ax^b$, $y = ae^{bx}$ oder $y = ax + b$) und substituiere $y = z + y_p$.
- Bestimme die Lösung von $z' + (f(x) + 2g(x)y_p)z + g(x)z^2 = 0$ und setze dies in $y = z + y_p$ ein.

Exakte DGL: $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ heißt *exakt*, falls $P_y = Q_x$. Es gibt dann eine Funktion $F(x, y)$, so dass die allgemeine Lösung durch die Gleichung $F(x, y) = c$ beschrieben wird. Man findet F wie folgt.

- Setze $F = \int P dx + \Phi(y)$ und berechne Φ aus der Bedingung $F_y = Q$ oder
- setze $F = \int Q dy + \Psi(x)$ und berechne Ψ aus der Bedingung $F_x = P$.

Integrierender Faktor: Ist $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$ nicht exakt, suche eine Funktion $M(x)$ oder $M(y)$ mit

$$M \cdot (P_y - Q_x) = M_x Q \quad \text{bzw.} \quad M \cdot (P_y - Q_x) = -M_y P.$$

Die DGL $M \cdot P(x, y) + M \cdot Q(x, y)y' = 0$ ist dann exakt.

Clairautsche DGL: $y = xy' + h(y')$ hat die Lösungen $y = cx + h(c)$ für $c \in \mathbb{R}$. Einhüllende der Lösungen ist die Kurve $(x, y) = (-h'(z), -h'(z)z + h(z))$.

DGL zweiter Ordnung:

- $y'' = f(x) \implies y = \int (\int f(x) dx) dx + c_1 x + c_2$
- $y'' = f(x, y') \rightsquigarrow$ substituiere $z = y'$
- $y'' = f(y, y') \rightsquigarrow$ Löse die DGL $z' \cdot z = f(y, z)$. Löse dann die DGL $y' = z(y)$.

Eulersche DGL: $a_3 x^3 y''' + a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$.

Substituiere $x = e^t$ und $v(t) = y(e^t)$. Dann ist

$$y'(x) = e^{-t} \cdot \dot{v}(t),$$

$$y''(x) = e^{-2t} \cdot (\ddot{v}(t) - \dot{v}(t)),$$

$$\text{und} \quad y'''(x) = e^{-3t} \cdot (\ddot{v}(t) - 3\dot{v}(t) + 2v(t)).$$

Mehrfachintegrale

Normalbereich: Ein Bereich der Form

$$B = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

heißt Normalbereich bezüglich der y -Achse. Das Integral einer Funktion $f(x, y)$ über B ist dann

$$\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Für einen Normalbereich bezüglich der x -Achse

$$B = \{(x, y) \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$$

ist das Integral entsprechend

$$\int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Masse und Schwerpunkt: Eine Fläche B in der x, y Ebene mit Dichtefunktion $\rho(x, y)$ hat

$$\text{Gesamtmasse} \quad M = \iint_B \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Stat. Moment zur } x\text{-Achse} \quad M_x = \iint_B y \cdot \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Stat. Moment zur } y\text{-Achse} \quad M_y = \iint_B x \cdot \rho(x, y) dx dy$$

$$\text{Schwerpunkt} \quad S = \left(\frac{M_y}{M}, \frac{M_x}{M} \right)$$

Oberflächeninhalt: Die Fläche, die eine Funktion $f(x, y)$ über einem Bereich B definiert, hat den Inhalt

$$O = \iint_B \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy.$$

Masse und Schwerpunkt: Ein Bereich B im Raum mit Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$ hat

$$\text{Gesamtmasse} \quad M = \iiint_B \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\text{Schwerpunkt} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} \quad x_s = \frac{\iiint_B x \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

$$y_s = \frac{\iiint_B y \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

$$z_s = \frac{\iiint_B z \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz}{M}$$

Trägheitsmoment:

$$I_x = \iiint_B (y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } x\text{-Achse}$$

$$I_y = \iiint_B (x^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } y\text{-Achse}$$

$$I_z = \iiint_B (x^2 + y^2) \cdot \rho(x, y, z) dx dy dz \quad \text{bzgl. } z\text{-Achse}$$

Polarkoordinaten: Für $x(r, \varphi) = r \cos(\varphi)$, $y(r, \varphi) = r \sin(\varphi)$ und $g(r, \varphi) = f(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$ gilt

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_B r \cdot g(r, \varphi) dr d\varphi.$$

Kugelkoordinaten: Für $x(r, \varphi, \theta) = r \cos(\varphi) \sin(\theta)$, $y(r, \varphi, \theta) = r \sin(\varphi) \sin(\theta)$, $z(r, \varphi, \theta) = r \cos(\theta)$ und $g(r, \varphi, \theta) = f(x(r, \varphi, \theta), y(r, \varphi, \theta), z(r, \varphi, \theta))$ gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B r^2 \sin(\theta) \cdot g(r, \varphi, \theta) dr d\varphi d\theta.$$

Zylinderkoordinaten: Für $x(r, \varphi, z) = r \cos(\varphi)$, $y(r, \varphi, z) = r \sin(\varphi)$, $z(r, \varphi, z) = z$ und $g(r, \varphi, z) = f(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z))$ gilt

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B r \cdot g(r, \varphi, z) dr d\varphi dz.$$

Kurvenintegrale: Das Integral über ein Vektorfeld

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$$

entlang einer Kurve $\vec{x}(t)$ ist definiert als

$$\int \langle \vec{K}(\vec{x}(t)), \dot{\vec{x}}(t) \rangle dt.$$

Oberflächenintegrale: Ist \vec{K} ein Vektorfeld und F ein Flächenstück, dann ist das Integral von \vec{K} auf F

$$\iint_B \left\langle \vec{K}(x, y, f(x, y)), \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx dy,$$

wenn F in der Form $z = f(x, y)$ mit $(x, y) \in B$ gegeben ist und

$$\iint_B \langle \vec{K}(\vec{x}(u, v)), \vec{x}_u \times \vec{x}_v \rangle du dv,$$

wenn F in Parameterform $\vec{x}(u, v)$ gegeben ist.