

Mathematik II SS 2015
12. Übungsblatt
2.7.2015

Aufgabe 12.1. Integrieren Sie die Funktionen

- (a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$ über das Dreieck mit Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$,
- (b) $g(x, y) = \frac{x - e^y \sin(x)}{\sqrt{1 + y^2}}$ über die Einheitskreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 1$,
- (c) $h(x, y) = x \sin(y) - ye^x$ über den Bereich $[-1, 1] \times [0, \pi/2]$.

Aufgabe 12.2. Integrieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = 2xy$$

über den Bereich

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 1 \leq y^2 \wedge y \leq x + 2 \wedge 1 \leq y \leq 3\}.$$

Aufgabe 12.3. Ein Zylinder der Höhe H mit kreisförmiger Grundfläche mit Radius R wird auf seiner Grundfläche mit einer Halbkugel vom Radius R verklebt. Welchen Wert muss H (in Abhängigkeit von R) annehmen, damit der Schwerpunkt des entstandenen Körpers genau im Mittelpunkt der Klebefläche liegt? Die Dichte kann konstant als $\rho = 1$ angenommen werden.

Aufgabe 12.4. Gegeben ist die Kugelschale

$$K = \{(x, y, z) \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

Welche Masse besitzt diese Kugelschale, wenn die Dichte durch

- (a) $\rho(x, y, z) = (x + y)z$
- (b) $\rho(x, y, z) = x + y + z$
- (c) $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

gegeben ist?

Aufgabe 12.5. Bestimmen Sie durch Wegintegrale die Arbeit, welche ein Körper im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ im Kraftfeld

$$\vec{K}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

verrichtet, wenn er sich entlang der folgenden Kurven bewegt.

- (a) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(t) \end{pmatrix}, t_1 = 0, t_2 = T;$
- (b) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, t_1 = 0, t_2 = T;$
- (c) $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, t_1 = -T, t_2 = 0.$