Mathematik II SS 2015
7. Übungsblatt
21.5.2015

Aufgabe 7.1. Berechnen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \cos(2t) \\ 2\sin(t) - \sin(2t) \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt t den Tangentenvektor und ermitteln Sie alle Zeitpunkte, an welchen horizontale Tangenten, vertikale Tangenten oder stationäre Punkte vorliegen.

Aufgabe 7.2. Wir betrachten die gleiche Kurve wie in Aufgabe 7.1. Bestimmen Sie für $t \in [0, 2\pi]$ die Bogenlänge $s(t)$, wobei $s(\pi) = 0$ gelten soll. Geben Sie danach die natürliche Parametrisierung $\vec{x}(s)$ der Kurve an. Welches Intervall durchläuft s hierbei?
Hinweis: Summenformel für Sinus und Kosinus.

Aufgabe 7.3. Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)^3 \\ \sin(t)^3 \end{pmatrix}$$

die Scheitelpunkte sowie die dazugehörigen Scheitelkrümmungen.

Aufgabe 7.4. Bestimmen Sie zur Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+t^2} \\ t \end{pmatrix}$$

für jeden Zeitpunkt t die Krümmung $\kappa(t)$ sowie den Mittelpunkt des Krümmungskreises. Stellen Sie die Kurve und ihre Evolute in einer Skizze dar.

Aufgabe 7.5. Die Kurve

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ t - 3t^3 \end{pmatrix}$$

bildet eine Schleife, das heißt, es gibt genau zwei Zeitpunkte $t_1 \neq t_2$ mit $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$. Ermitteln Sie die Werte t_1, t_2 und die Bogenlänge sowie den überstrichenen Flächeninhalt zwischen diesen Zeitpunkten.

Aufgabe 7.6. Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch $r(\varphi) = \frac{1}{1+\varphi}$ gegeben. Bestimmen Sie die Bogenlänge und den überstrichenen Flächeninhalt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Phi$. Was geschieht für $\Phi \to \infty$?