Mathematik II SS 2015
9. Übungsblatt
11.6.2015

Aufgabe 9.1. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y,z) = x^3z + \cos(yz^2) - x^2 + y^3 - z.$$

(a) Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von f am Punkt $\vec{p}$ in die Richtungen $\vec{r}$ und $\vec{s}$.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{r} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{s} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(b) In welche Richtungen ist die Richtungsableitung im Punkt $\vec{p}$ maximal, in welche minimal und in welche Richtungen ist sie Null? Erinnerung: *Richtungen* sind immer *normierte* Vektoren.

Aufgabe 9.2. Eine Kurve sei implizit durch die Gleichung

$$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$$

gegeben. Ermitteln Sie alle singulären Punkte und alle Punkte, an denen vertikale oder horizontale Tangenten vorliegen. Geben Sie für alle anderen Punkte die Geradengleichung der Tangente an und skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 9.3. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz - ax^2 \\ xz - a^2z \\ xy - 4y + az^2 \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{R}$

(a) Für welche Werte von a ist das Vektorfeld quellenfrei, für welche Werte ist es wirbelfrei?

(b) Wenn $\vec{v}(x,y,z)$ nicht quellenfrei ist, wo liegen dann Quellen und wo liegen Senken?

Aufgabe 9.4. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

(a) $f(x,y) = x\sqrt{1+y^2} - x^2$;

(b) $g(x,y) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2y^2 + xy - 3x$.

Aufgabe 9.5. Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktionen

(a) $f(x,y) = x \cdot \ln(1+y^2)$;

(b) $g(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$;

(c) $h(x,y) = (x+y)e^{xy}$.