Diskrete Mathematik ICE

10. Übungsblatt

7. Juni 2016

46. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{k+n-1}{k}$$

gilt und folgern Sie mit Hilfe des verallgemeinerten binomischen Leersatzes, dass

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} \lambda^k x^k.$$

47. Bestimmen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung die Reihenentwicklungen von

$$f(x) = \frac{1}{1-7x+16x^2-12x^3} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{3x+5}{x^2+x-12}.$$

48. Gegeben ist $a_n = n3^n - 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Finden Sie geschlossene Ausdrücke für die Potenzreihen

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{und} \qquad G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Letztere Potenzreihe bezeichnet man als *exponentielle erzeugende Funktion* der Folge (a_n).
Hinweis: Es gilt $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

49. Ermitteln Sie die erzeugende Funktion $H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n$ der *harmonischen Zahlen*

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

50. Zur Mitte des 20. Jahrhunderts gab es in Großbritannien folgende Münzen und Banknoten mit einem Wert von bis zu einem Pfund (aufsteigend nach Wert sortiert).

- Farthing (Viertelpenny) und Halfpenny (halber Penny);
- Penny, Threepence (drei Pennies) und Sixpence (sechs Pennies);
- Shilling (zwölf Pennies), Florin (zwei Shilling), Half Crown (zwei Shilling und ein Sixpence), Crown (fünf Shilling), Ten Bob (zehn Shilling);
- Sovereign (zwanzig Shilling bzw. ein Pfund).

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion, mit welcher die Anzahl verschiedener Möglichkeiten ermittelt werden kann, einen gewissen Geldbetrag zu bezahlen. Lesen Sie aus dieser Funktion die Anzahl an Möglichkeiten ab, Ware im Wert von zwei Pennies zu bezahlen.