Diskrete Mathematik ICE

11. Übungsblatt

14. Juni 2016

51. Beim Snooker (Billard-Variante) werden 15 rote Kugeln sowie je eine gelbe, grüne, braune, blaue, pinke und schwarze Kugel verwendet. Verwenden Sie erzeugende Funktionen, um herauszufinden, wie viele Möglichkeiten es gibt, 6 dieser Kugeln auszuwählen, wobei

(a) höchstens 4 rote Kugeln gewählt werden;

(b) eine ungerade Anzahl an roten Kugeln gewählt wird;

(c) ebenso viele gelbe wie braune Kugeln gewählt werden sowie genau eine rote Kugel mehr als schwarze Kugeln.

52. Beim Snooker sind die roten Kugeln 1 Punkt wert und die anderen Kugeln in der Reihenfolge, wie sie in Aufgabe 51 aufgeführt sind, 2 bis 7 Punkte. Die Kugeln müssen immer in der Reihenfolge Rot – Farbe – Rot – Farbe etc. (im Snooker-Jargon ist Rot keine Farbe) versenkt werden, d.h. in ein Loch am Tischrand gespielt. Die farbigen Kugeln werden nach dem Versenken jeweils wieder auf den Tisch gelegt und können daher mehrfach versenkt werden.

(a) Wenn man hintereinander genau 8 Kugeln versenkt (beginnend mit einer roten), wie viele Möglichkeiten gibt es, dabei exakt 18 Punkte zu erlangen? Hierbei kommt es auch auf die Reihenfolge des Versenkens an. Verwenden Sie zur Lösung erzeugende Funktionen.

(b) Anhand welcher erzeugenden Funktion kann man die Anzahl der Möglichkeiten ablesen, wenn es im vorherigen Aufgabenteil *nicht* auf die Reihenfolge ankäme? Sie müssen den entsprechenden Koeffizienten *nicht* ausrechnen.

53. Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für die Folgenglieder a_n der Folge

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = 7 \qquad \text{und} \qquad a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 3^n \quad \text{für } n \geq 2.$$

54. Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für die Folgenglieder a_n der Folge

$$a_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_n + 2a_{n-1} = 9n \quad \text{für } n \geq 1.$$

55. Zwei Graphen G_1, G_2 heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f\colon V(G_1) \to V(G_2)$ gibt, so dass $E(G_2) = \{[f(x), f(y)] \mid x, y \in E(G_1)\}$ (in Worten: zwei Knoten sind genau dann in G_1 durch eine Kante verbunden, wenn ihre Bilder in G_2 durch eine Kante verbunden sind). Auf der folgenden Seite sind sechs Graphen abgebildet, von denen jeder zu genau einem anderen isomorph ist (diese Eigenschaft dürfen Sie bei der Lösung verwenden). Finden Sie die isomorphen Paare.