Diskrete Mathematik ICE

2. Übungsblatt

15. März 2016

6. Zeigen Sie per Induktion, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ entweder selbst eine Primzahl ist oder durch eine Primzahl p mit $p \leq \sqrt{n}$ teilbar ist.

7. Zeigen Sie, dass für $m, n \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{ggT}(m,n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}} \qquad \text{und} \qquad \mathrm{kgV}(m,n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{\nu_m(p), \nu_n(p)\}}$$

gilt und folgern Sie hieraus, dass $m \cdot n = \mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n)$.

Erinnerung. Mit $\nu_n(p)$ wird diejenige Zahl bezeichnet, für welche $p^{\nu_n(p)} \mid n$ aber *nicht* $p^{\nu_n(p)+1} \mid n$.

8. Verfassen Sie einen möglichst effizienten Algorithmus, welcher zu einer gegebenen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und einer Liste aller Primzahlen $p \leq n$ die Primfaktorzerlegung von n ermittelt. Führen Sie den Algorithmus für das Beispiel $n = 63$ an der Tafel durch.

9. Untersuchen Sie für die folgenden Relationen, bei welchen es sich um Äquivalenzrelationen und bei welchen um Ordnungsrelationen auf der Menge $X = \mathbb{N}$ handelt.

(a) $mRn \iff \mathrm{ggT}(m,n) = 42$;

(b) $mRn \iff 2 \mid (m+n)$;

(c) $mRn \iff m = n$.

10. Zeigen Sie, dass auf $X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(m,n)R(p,q) \iff mq = np$$

eine Äquivalenzrelation ist. Bestimmen Sie die Zerlegung von X in Äquivalenzklassen und geben Sie ein Repräsentantensystem an.