

Diskrete Mathematik ICE

7. Übungsblatt

10. Mai 2016

In den Aufgaben, in welchen *nicht* die Verwendung einer Wahrheitstafel gefordert wird, dürfen Sie die logischen Regeln auf der zweiten Seite dieses Aufgabenblattes verwenden.

31. Gegeben seien aussagenlogische Formeln X und Y . Außerdem sei T eine Tautologie und K eine Kontradiktion.

(a) Zeigen Sie anhand einer Wahrheitstafel, dass

$$X \vee T \iff T, \quad X \wedge T \iff X, \quad X \vee K \iff X \quad \text{und} \quad X \wedge K \iff K.$$

(b) Erstellen Sie eine Wahrheitstafel für die Formeln $X \rightarrow Y$ und $X \leftrightarrow Y$ und begründen Sie anhand dieser Tafel, dass diese Formeln genau dann Tautologien sind, falls $X \Rightarrow Y$ beziehungsweise $X \Leftrightarrow Y$ gilt.

32. Sei M eine Menge aussagenlogischer Formeln.

(a) Zeigen Sie, dass

$$XRY \text{ genau dann, wenn } X \iff Y$$

eine Äquivalenzrelation auf M definiert. Die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit \mathcal{M} .

(b) Für jede Äquivalenzklasse $\alpha \in \mathcal{M}$ wählen wir einen Repräsentanten X_α . Zeigen Sie, dass

$$\alpha R \beta \text{ genau dann, wenn } X_\alpha \implies X_\beta$$

eine Ordnungsrelation auf \mathcal{M} definiert, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist.

33. Seien X, Y aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass $((X \rightarrow Y) \wedge \neg Y) \rightarrow \neg X$ eine Tautologie und $(\neg X \leftrightarrow Y) \wedge \neg(X \leftrightarrow \neg Y)$ eine Kontradiktion ist, indem Sie

(a) eine Wahrheitstafel aufstellen,

(b) die logischen Regeln auf der zweiten Seite des Aufgabenblattes verwenden.

34. Seien X, Y, Z aussagenlogische Formeln. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln äquivalent sind.

$$(a) \quad (\neg X \rightarrow Y) \rightarrow (Y \vee Z) \quad \text{und} \quad (\neg Y \rightarrow X) \rightarrow (\neg Y \rightarrow Z),$$

$$(b) \quad X \rightarrow (Y \rightarrow Z), \quad Y \rightarrow (X \rightarrow Z) \quad \text{und} \quad (X \wedge Y) \rightarrow Z.$$

35. Bestimmen Sie jeweils die n -KNF und die n -DNF der Formeln $A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$ und $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$.

Liste der erlaubten Regeln

- $$\neg\neg X \iff X \quad (1)$$
- $$X \wedge \top \iff X \quad (2)$$
- $$X \vee \perp \iff X \quad (3)$$
- $$X \wedge X \iff X \quad (4)$$
- $$X \vee X \iff X \quad (5)$$
- $$X \leftrightarrow Y \iff (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X) \quad (6)$$
- $$(X \wedge Y) \wedge Z \iff X \wedge (Y \wedge Z) \quad (7)$$
- $$(X \vee Y) \vee Z \iff X \vee (Y \vee Z) \quad (8)$$
- $$X \wedge Y \iff Y \wedge X \quad (9)$$
- $$X \vee Y \iff Y \vee X \quad (10)$$
- $$X \wedge (Y \vee Z) \iff (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \quad (11)$$
- $$X \vee (Y \wedge Z) \iff (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \quad (12)$$
- $$\neg(X \vee Y) \iff \neg X \wedge \neg Y \quad (13)$$
- $$\neg(X \wedge Y) \iff \neg X \vee \neg Y \quad (14)$$
- $$X \rightarrow Y \iff \neg X \vee Y \quad (15)$$
- $$X \rightarrow Y \iff \neg Y \rightarrow \neg X \quad (16)$$
- $$X \vee \neg X \iff \top \quad (17)$$
- $$X \wedge \neg X \iff \perp \quad (18)$$
- $$X \vee \top \iff \top \quad (19)$$
- $$X \wedge \perp \iff \perp \quad (20)$$
- $$(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z) \implies (X \rightarrow Z) \quad (21)$$
- $$\perp \implies X \quad (22)$$
- $$X \implies \top \quad (23)$$
- $$X \wedge Y \implies X \quad (24)$$