Formelsammlung zur Vorlesungsprüfung

Mathematik I, M

Komplexe Zahlen

$z = a + bi,\ a = \mathrm{Re}(z)$ Realteil, $b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil

Komplex konjugierte Zahl:

$$\bar{z} = a - bi$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Vektorrechnung

Länge eines Vektors:

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Parameterfreie Ebenengleichung:

$\vec{n} \cdot \vec{x} = C,\ \vec{n}$ senkrecht zur Ebene und C eine Konstante

Winkel φ zwischen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\,|\vec{y}|}$$

Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{x} \times \vec{y}|$$

Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:

$$|\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$$

Folgen

Geometrische Folge:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Majorantenkriterium: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und gilt $|b_n - a| \leq |a_n - a|$ für alle n, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Monotoniekriterium: Jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert für } \alpha > 1$$

Majorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Minorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine divergente Minorante, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Wurzelkriterium: Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ ab einem Index N, dann divergiert die Reihe.
Quotientenkriterium: Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ ab einem Index N, dann divergiert die Reihe.
Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Funktionen

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^a) = a\ln(x)$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \cot(x + \pi) = \cot(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \cot(-x) = -\tan(x)$$

Satz von Weierstraß: Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann gibt es einen Punkt in $[a, b]$ mit maximalem Funktionswert sowie einen mit minimalem Funktionswert.
Zwischenwertsatz: Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann kommt jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ irgendwo in $[a, b]$ als Funktionswert vor.

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$	$f(x)$ $\int g(x)dx$	$f'(x)$ $g(x)$
x^a, $(a \neq 0)$	ax^{a-1}	e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\coth(x)$	$\frac{-1}{\sinh^2(x)}$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Ist die Ableitung an einer Stelle 0 und die zweite Ableitung negativ, liegt eine Maximalstelle vor. Ist die Ableitung 0 und die zweite Ableitung positiv, liegt eine Minimalstelle vor.

Monotonie:

Gilt auf (a, b)	dann ist f auf $[a, b]$
$f'(x) \geq 0,$	monoton steigend
$f'(x) > 0,$	streng monoton steigend
$f'(x) \leq 0,$	monoton fallend
$f'(x) < 0,$	streng monoton fallend

Asymptoten: Konvergiert $\frac{f(x)}{x}$ sowohl für $x \to \infty$ als auch für $x \to -\infty$ gegen einen Wert k und konvergiert $f(x) - kx$ in beiden Richtungen gegen d, dann ist $kx + d$ eine Asymptote von f.

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \to a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞, dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylorreihen und -polynome

Taylorpolynom vom Grad n um x_0:

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylorreihe um x_0:

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiert für alle x mit $|x| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Integrationsregeln

Partielle Integration:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Substitution: Setzen wir $x = g(u)$, dann ist

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)du.$$

Insbesondere

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$$

Standardsubstitution bei trigonometrischen Funktionen:

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$
$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Ist F eine Stammfunktion von f und beide Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ist f in a oder b nicht definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)dx \qquad \text{beziehungsweise}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b^-} \int_a^y f(x)dx.$$

Hat f eine Polstelle im Punkt $c \in (a, b)$, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to c^-} \int_a^y f(x)dx + \lim_{y\to c^+} \int_y^b f(x)dx$$

Substitution: Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big).$$