Vorlesung Mathematik I, M

Prüfung, Lösungen

1.2.2013

1. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\ln\left(e^x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(e^x - 1\right) = x$$

Lösung: Der Logarithmus hat die Eigenschaft $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$, wir können daher die linke Seite zusammenfassen.

$$\begin{aligned} & \ln\left(e^x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(e^x - 1\right) = x \\ \iff \quad & \ln\left(\left(e^x + \frac{3}{2}\right)\left(e^x - 1\right)\right) = x \\ \iff \quad & \ln\left((e^x)^2 + \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2}\right) = x \end{aligned}$$

Jetzt wenden wir auf beide Seiten die Exponentialfunktion an. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} & (e^x)^2 + \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2} = e^x \\ \iff \quad & (e^x)^2 - \frac{1}{2}e^x - \frac{3}{2} = 0. \end{aligned}$$

Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen ist also

$$e^x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{1 \pm 5}{4},$$

also $e^x = \frac{3}{2}$ oder $e^x = -1$. Da die Exponentialfunktion nie negativ wird, gilt $e^x = \frac{3}{2}$ und somit

$$x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(3) - \ln(2).$$

$\square$

2. Bestimmen Sie zu der Funktion $f(x) = \frac{e^x}{x+3}$ alle lokalen Maximalstellen und Minimalstellen sowie die Grenzwerte für $x \to -\infty$, $x \to -3^-$, $x \to -3^+$ und $x \to \infty$!

(Zur Erinnerung: $\lim_{x\to a^-}$ *bezeichnet den linksseitigen und* $\lim_{x\to a^+}$ *den rechtsseitigen Grenzwert.)*

Lösung: Alle lokalen Extremstellen sind Nullstellen der ersten Ableitung. Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \frac{e^x(x+3) - e^x}{(x+3)^2} = \frac{e^x(x+2)}{(x+3)^2}.$$

Da e^x immer ungleich 0 ist, ist $x_1 = -2$ die einzige Nullstelle. Falls es ein lokales Extremum gibt, liegt dies also an der Stelle x_1.

Die zweite Ableitung von f ist

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\big(e^x(x+2) + e^x\big)(x+3)^2 - e^x(x+2)2(x+3)}{(x+3)^4} \\ &= \frac{e^x(x+3)^2 - 2e^x(x+2)}{(x+3)^3} = \frac{e^x\big((x+3)^2 - 2(x+2)\big)}{(x+3)^3}. \end{aligned}$$

Setzen wir den Wert $x_1 = -2$ ein, erhalten wir

$$f''(-2) = \frac{e^{-2}(1^2 - 2 \cdot 0)}{1^3} = e^{-2}.$$

Da dieser Wert positiv ist, liegt bei $x_1 = -2$ ein lokales Minimum vor.

Nun zu den Grenzwerten: Für $x \to -\infty$ geht der Zähler von f gegen 0 und der Nenner gegen $-\infty$, insgesamt ist also

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Für $x \to -3^-$ geht der Zähler gegen e^{-3} und der Nenner gegen 0. Die Werte, die der Nenner dabei annimmt, sind negativ, also haben wir

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = -\infty.$$

Für $x \to -3^+$ geht der Zähler gegen e^{-3} und der Nenner gegen 0. Die Werte, die der Nenner dabei annimmt, sind positiv, also haben wir

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \infty.$$

Für $x \to \infty$ gehen sowohl Zähler als auch Nenner gegen ∞, wir benötigen daher l'Hospital.

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x+3} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$$

$\square$

3. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ in eine Taylorreihe um den Punkt $x_0 = 0$.

   Lösung: Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)\big(-\sin(x)\big) = \cos^2(x) - \sin^2(x),$$

die zweite Ableitung ist

$$f''(x) = 2\cos(x)\big(-\sin(x)\big) - 2\sin(x)\cos(x) = -4\sin(x)\cos(x).$$

Weil dies gerade $-4f(x)$ ist, wiederholen sich die Ableitungen nun, wobei man alle zwei Schritte einen Faktor -4 hinzu bekommt.

Wir setzen die Stelle $x_0 = 0$ ein und erhalten

$$f(0) = 0 \cdot 1 = 0 \qquad \text{und} \qquad f'(0) = 1 - 0 = 1.$$

Jede gerade Ableitung hat also an der Stelle 0 den Wert 0, jede ungerade Ableitung hat den Wert

$$f^{(2n+1)}(0) = (-4)^n.$$

Die Taylorreihe ist somit

$$T_{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Bemerkung: Man kann auch die Formel $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ verwenden. Damit erhält man nämlich $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ und kann so ebenfalls die Ableitungen berechnen: Die geraden Ableitungen sind $f^{(2n)}(x) = \frac{1}{2}(-4)^n \sin(2x)$, die ungeraden sind $f^{(2n+1)}(x) = (-4)^n \cos(2x)$. Die Funktionswerte am Punkt 0 und die Taylorreihe ergeben sich wie oben. □

4. (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und geben Sie gegebenenfalls den Wert des Integrals an.

(b) $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx$

(c) $\displaystyle\int_3^\infty f(x)dx$

Lösung: (a) Wir spalten das Integral in zwei Teile auf.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$$

Im ersten Integral auf der rechten Seite substituieren wir $y = x^2 - 4$, also $dy = 2xdx$.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{y}}dy = \sqrt{y} + C = \sqrt{x^2-4} + C.$$

Das andere Integral wollen wir auf die Form $\int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}dz$ bringen, da dies eines der bekannten Standardintegrale ist. Dazu müssen wir den Faktor 4 aus der Wurzel heraus ziehen. Damit wir diesen auch aus dem Summanden x^2 ziehen können, wollen wir das x^2 zuerst durch

$4z^2$ ersetzen. Wir substituieren also $x = 2z$, das bedeutet $dx = 2dz$. Dadurch ergibt sich

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{4z^2-4}}2dz = \int \frac{2}{2\sqrt{z^2-1}}dz = \int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}dz$$
$$= \operatorname{arcosh}(z) + C = \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Insgesamt haben wir also

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$$
$$= \sqrt{x^2-4} + \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

(b) Das Integral entspricht nach Teil (a)

$$\int_2^3 f(x)dx = \left[\sqrt{x^2-4} + \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_2^3.$$

Beide Summanden existieren an beiden Grenzen, also ist

$$\int_2^3 f(x)dx = \left(\sqrt{5} + \operatorname{arcosh}\left(\frac{3}{2}\right)\right) - (0+0) \approx 3.198.$$

(c) Das Integral entspricht nach Teil (a)

$$\int_3^\infty f(x)dx = \left[\sqrt{x^2-4} + \operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_3^\infty.$$

Beide Summanden konvergieren für $x \to \infty$ gegen ∞, also existiert der Grenzwert der Stammfunktion an der oberen Grenze nicht. Somit existiert auch das Integral nicht. □