Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*
5. Oktober 2012

Aufgabe 1. Formulieren Sie die folgenden Aussagen sowie deren Verneinung in formaler Schreibweise unter Verwendung von Quantoren:

(a) Jede reelle Zahl ist höchstens so groß wie ihr Quadrat.

(b) Für jede reelle Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die um höchstens eins größer ist.

Lösung: (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x^2$. (In Worten: Für alle x in den reelen Zahlen gilt: x ist höchstens so groß wie das Quadrat von x.)

Die Verneinung dieser Aussage lautet
$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$. (Es existiert ein x in den reellen Zahlen, für das gilt: x ist größer als das Quadrat von x.)

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n \leq x + 1$. (Für alle x in den reellen Zahlen gibt es ein n in den natürlichen Zahlen, das größer als x aber höchstens so groß wie $x + 1$ ist.)

Die Verneinung dieser Aussage lautet
$\exists x \in \mathbb{R}\ \nexists n \in \mathbb{N} : x < n \leq x + 1$ (es existiert ein x in den reellen Zahlen, für das es kein n in den natürlichen Zahlen gibt, welches größer als x aber höchstens so groß wie $x + 1$ ist)
oder alternativ
$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x \vee n > x + 1$ (es existiert ein x in den reellen Zahlen, so dass für alle n in den natürlichen Zahlen gilt: n ist höchstens so groß wie x oder größer als $x + 1$).

$\square$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

***Aufgabe 2.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Lösung: Als Induktionsanfang zeigen wir, dass die Behauptung für $n = 1$ wahr ist. Die linke Seite der Behauptung entspricht in diesem Fall

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Die rechte Seite entspricht

$$1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}.$$

Beide Seiten sind identisch und somit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass wir die Behauptung bereits für $n = N$ bewiesen haben (also $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^N}$ gilt) und zeigen, dass hieraus die Behauptung für $n = N + 1$ folgt. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}.$$

($\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2^k}$ steht für $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}}$ und $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}$ steht für $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^N}$, also ist $\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}$.) Nach Induktionsannahme entspricht die rechte Summe $1 - \frac{1}{2^N}$ und wir haben

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} + 1 - \frac{1}{2^N} = 1 - \frac{1}{2^{N+1}}.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Behauptung für alle n bewiesen. □

Aufgabe 3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

Lösung: Als Induktionsanfang zeigen wir, dass die Behauptung für $n = 1$ wahr ist. Die linke Seite entspricht in diesem Fall

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{(3 \cdot 1 - 2)(3 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{4}.$$

Die rechte Seite ist

$$\frac{1}{3 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Beide Seiten sind identisch und somit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass wir die Behauptung bereits für $n = N$ bewiesen haben (also $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{N}{3N+1}$ gilt) und zeigen, dass hieraus die Behauptung für $n = N + 1$ folgt. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{(3N+1)(3N+4)} + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

(Argumentation wie in der vorherigen Aufgabe.) Nach Induktionsannahme entspricht die rechte Summe $\frac{N}{3N+1}$ und wir haben also

$$\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{(3N+1)(3N+4)} + \frac{N}{3N+1}$$

Nun erweiteren wir den rechten Bruch mit $3N + 4$ und erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \frac{1 + N(3N+4)}{(3N+1)(3N+4)} = \frac{3N^2 + 4N + 1}{(3N+1)(3N+4)} \\ &= \frac{(3N+1)(N+1)}{(3N+1)(3N+4)} = \frac{N+1}{3N+4} = \frac{N+1}{3(N+1)+1}.\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und die Behauptung für alle n bewiesen. □

***Aufgabe 4.** Stellen Sie

$$z = \frac{(-3+4i)^2(-3-4i)}{(1+2i)^2}$$

in der Form $a + bi$ (also mit getrenntem Real- und Imaginärteil) dar.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} z &= \frac{(-3+4i)^2(-3-4i)}{(1+2i)^2} = \frac{(-3+4i)(-3+4i)(-3-4i)}{1+4i+4i^2} \\ &= \frac{(-3+4i)(-3+4i)(-3-4i)}{-3+4i}.\end{aligned}$$

Nun können wir mit $-3 + 4i$ kürzen und bekommen

$$z = (-3+4i)(-3-4i) = (-3)^2 - (4i)^2 = 9 - (-16) = 25.$$

□

Aufgabe 5. Stellen Sie

$$z = \frac{(1+i)^3(2-2i)}{2i}$$

in der Form $a + bi$ dar.

Lösung: Es ist

$$z = \frac{(1+i)^3(2-2i)}{2i} = \frac{(1+i)^2(1+i)(1-i)\cdot 2}{2i}$$

Wir kürzen nun mit 2 und verwenden für $(1+i)^2$ und $(1+i)(1-i)$ die binomischen Formeln. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} z =& \frac{(1+i)^2(1+i)(1-i)}{i} = \frac{(1+2i+i^2)(1-i^2)}{i} \\ =& \frac{(1+2i-1)(1-(-1))}{i} = \frac{2i\cdot 2}{i} = 4. \end{aligned}$$

$\square$