Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

11. Januar 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

(b) $\displaystyle\int 2x^3\ln(x)dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx, \quad a>0$

Lösung: Zunächst einmal führen wir hier eine Liste von grundlegenden Integralen auf.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1$$
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$
$$\int e^x dx = e^x + C$$
$$\int \sin(x)dx = -\cos(x)+C$$
$$\int \cos(x)dx = \sin(x)+C$$
$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)+C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \operatorname{arsinh}(x)+C$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx &= \operatorname{arcosh}(x)+C\\
\int \frac{1}{1-x^2}dx &= \operatorname{artanh}(x)+C\\
\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx &= -\cot(x)+C\\
\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx &= \tan(x)+C
\end{aligned}$$

Als nächstens wollen wir ein paar allgemeine Strategien zur Bestimmung von $\int f(x)dx$ benennen:

- Ist $f(x)$ ein Bruch, sollte man überprüfen, ob der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Falls ja, also $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, dann können wir $u = g(x)$ substituieren. Mit $du = g'(x)dx$ erhalten wir

$$\int f(x)dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|g(x)| + C.$$

- Ähnelt $f(x)$ einem der Integranden aus der obigen Liste, sollte man es mit Substitution versuchen. Standardsubstitutionen sind hierbei $u = x+\alpha$, $u = \alpha x$, $u = x^\alpha$ sowie die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen, die Exponentialfunktion und der Logarithmus. Die trigonometrischen Funktionen eignen sich vor allem dann als Substitution, wenn Ausdrücke der Form $1-x^2$ vorkommen, da man dann nach der Substitution $u = \sin(x)$ (oder $u = \cos(x)$) die Identität $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ausnutzen kann. Gleiches gilt für die hyperbolischen Funktionen bei Ausdrücken der Form $1+x^2$.

- Ist $f(x) = g(x)h(x)$ ein Produkt, bietet sich die partielle Integration an. Hier gilt es zu entscheiden welchen der beiden Faktoren man ableiten und welchen man integrieren möchte. Kennt man zum Beispiel die Stammfunktion G von g, aber nicht die von h, dann sollte man g integrieren und h ableiten, also

$$\int f(x)dx = G(x)h(x) - \int G(x)h'(x)dx.$$

Einige Terme wie e^x oder x^α eignen sich sowohl zum Integrieren als auch zum Ableiten. Dort kommt es darauf an, wie der andere Faktor aussieht. Ist zum Beispiel $g(x) = x^\alpha$ und $h(x) = \ln(x)$, dann kann man zwar $h(x)$ integrieren (das Integral ist $x\ln(x) - x$), dadurch wird man allerdings den Faktor $\ln(x)$ nicht eliminieren können. Leitet man $h(x)$ aber ab, ist nur noch ein Integral der Form $\int G(x)h'(x)dx = \int x^\beta dx$ zu lösen.

Es kann auch hilfreich sein, $f(x)$ als $1 \cdot f(x)$ zu schreiben. Dadurch erhält man

$$\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx.$$

Unter Umständen ist das rechte Integral leichter zu lösen.

- Manchmal lohnt es sich, mehrere Ansätze zu versuchen. Selbst wenn man etwa durch partielle Integration nur auf einen Ausdruck der Form

$$\int f(x)dx = a(x) - \int b(x)dx$$

kommt und das Integral auf der rechten Seite auch nicht lösen kann, dann kann diese Gleichung dennoch hilfreich sein. In einigen Fällen erhält man nämlich auf anderem Weg eine Gleichung der Form

$$\int f(x)dx = c(x) + \int b(x)dx.$$

Addiert man diese beiden Gleichungen und dividiert durch 2, ergibt sich dadurch

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}(a(x) + c(x)).$$

Wir verwenden nun einige dieser Strategien für die angegebenen Integrale.

(a) Bei $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ ist leicht zu sehen, dass der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Also ist

$$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x) + C.$$

(Die Betragstriche im Logarithmus können wir weglassen, da $1 + e^x$ immer positiv ist.)

(b) Hier teilen wir den Integranden zur partiellen Integration in die Faktoren $2x^3$ und $\ln(x)$ auf. Wie oben erwähnt, ist es keine gute Idee, den Faktor $\ln(x)$ zu integrieren, also leiten wir ihn ab. Es ist

$$\int 2x^3 \ln(x)dx = \frac{1}{2}x^4 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^3 dx = \frac{1}{2}x^4 \cdot \ln(x) - \frac{1}{8}x^4 + C.$$

(c) Das Integral ist ähnlich dem Integral $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ von unserer Liste, nur der konstante Anteil unter der Wurzel ist nicht wie gewünscht. Zuerst bringen wir diesen also auf den Wert 1:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx$$

Um nun die Wurzel in $\sqrt{x^2+1}$ umzuformen, substituieren wir $u = \frac{x}{a}$. Dabei ergibt sich $du = \frac{1}{a}dx$ beziehungsweise $dx = a \cdot du$. Wir erhalten also

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}dx = \int \frac{a}{a\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$$

$$= \operatorname{arsinh}(u) + C = \operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$ □

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int \tanh(x)dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}dx$

(c) $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)}dx$

Lösung: (a) Auf den ersten Blick ist nicht offensichtlich, welches Kriterium man anwenden soll. Schreibt man aber den tanh als $\frac{\sinh}{\cosh}$, hat man den Fall eines Bruches, in welchem der Zähler die Ableitung des Nenners ist. Also ist

$$\int \tanh(x)dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}dx = \ln(\cosh(x)) + C.$$

(Die Betragstriche im Logarithmus können wir weglassen, da $\cosh(x)$ immer positiv ist.)

(b) Der Integrand ähnelt den Integranden $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ und $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ aus unserer Liste. Wir versuchen, ihn durch Substitution in einen dieser beiden umzuformen. Um den Summanden $2x$ zu eliminieren, wenden wir quadratische Ergänzung an und schreiben x^2+2x als $x^2+2x+1-1 = (x+1)^2-1$.

Auf diese Art bekommen wir

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^1-1}}dx.$$

Nun substituieren wir $u = x+1$. Dabei gilt $du = dx$, also

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^1-1}}du = \operatorname{arcosh}(u) + C = \operatorname{arcosh}(x+1) + C.$$

(c) Schreiben wir $\cos^2(x) = \cos(x) \cdot \cos(x)$, dann können wir partielle Integration anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\int \cos^2(x)dx &= \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x) \cdot (-\sin(x))dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int \sin^2(x)dx \\ &= \sin(x)\cos(x) + \int 1dx - \int \cos^2(x)dx.\end{aligned}$$

Das Integral $\int \cos^2(x)dx$ auf der rechten Seite können wir nun nach links bringen und danach durch 2 dividieren. So bekommen wir

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(x) + \int 1dx\right) = \frac{\sin(x)\cos(x)+x}{2} + C.$$

(d) Das letzte Integral ist komplizierter. Keine unserer bisherigen Strategien führt dabei direkt zum Erfolg. Stattdessen verwenden wir ein paar Mal die Identität $1 = \sin^2 + \cos^2$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)}dx &= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^4(x)}dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^4(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx \\ &= \int \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^4(x)} + \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx \\ &= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)} + \frac{2}{\cos^2(x)} + \frac{1}{\sin^2(x)}dx \\ &= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}dx + 2\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx + \int \frac{1}{\sin^2(x)}dx\end{aligned}$$

Die letzten beiden Integrale stehen in unserer Liste, das erste können wir mit Substitution lösen: Setzen wir $u = \tan(x)$, dann ist $du = \frac{1}{\cos^2(x)}dx$ und somit

$$\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\tan^3(x) + C.$$

Setzen wir dies mit $\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx = \tan(x)+C$ und $\int \frac{1}{\sin^2(x)}dx = -\cot(x)+C$ in die obige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^4(x)}dx = \frac{1}{3}\tan^3(x) + 2\tan(x) - \cot(x) + C.$$

$\square$