Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*
18. Januar 2013

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^4+2x^3-26x^2-13x+36}{x^3+x^2-6x}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x\sinh(x)}{\cosh(x)+1}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}dx$

Lösung: (a) Bei der Partialbruchzerlegung führen wir zuerst eine Polynomdivision durch, bei der wir den Zähler durch den Nenner dividieren.

$$\begin{array}{l}
\big(3x^4+2x^3-26x^2-13x+36\big):\big(x^3+x^2-6x\big)=3x-1+\dfrac{-7x^2-19x+36}{x^3+x^2-6x}\\
\underline{-3x^4-3x^3+18x^2}\\
\qquad -x^3-8x^2-13x\\
\qquad \underline{x^3+x^2-6x}\\
\qquad\qquad -7x^2-19x
\end{array}$$

Um den verbleibenden Bruch in die Partialbrüche zu zerlegen, benötigen wir zunächst die Nullstellen des Nenners. Eine offensichtliche Nullstelle ist $x=0$. Der Nenner lässt sich also als Produkt $x(x^2+x-6)$ schreiben. Die beiden anderen Nullstellen erhalten wir mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen als $x=2$ und $x=-3$. Der Nenner entspricht somit dem Produkt $x(x-2)(x+3)$. Wir suchen nun Zahlen A,B,C mit

$$\frac{-7x^2-19x+36}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $x(x-2)(x+3)$, erhalten wir

$$\begin{aligned} -7x^2 - 19x + 36 &= A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \\ &= A(x^2 + x - 6) + B(x^2 + 3x) + C(x^2 - 2x). \end{aligned}$$

Um A, B, C zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Die einfachste Möglichkeit in diesem Fall ist es, für x die Nullstellen von $x(x-2)(x+3)$ einzusetzen. Setzt man $x = 0$ ein, fallen die Terme mit B und C weg und man erhält

$$36 = -6A,$$

also $A = -6$. Setzt man $x = 2$ ein, fallen die Terme mit A und C weg und man erhält

$$-30 = 10B,$$

also $B = -3$. Setzt man schließlich noch $x = -3$ ein, ergibt sich

$$30 = 15C,$$

also $C = 2$.

Das Verfahren, die Nullstellen einzusetzen, funktioniert allerdings nur, wenn der Nenner komplett in Linearfaktoren zerfällt. Im Allgemeinen muss man ein anderes Verfahren anwenden. Um dies einmal darzustellen, führen wir es bereits an dieser Stelle durch. Zunächst sortieren wir die Terme in der Gleichung nach Potenzen von x.

$$-7x^2 - 19x + 36 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 2C)x - 6A$$

Nun vergleichen wir die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x, wodurch wir die folgenden drei Gleichungen bekommen:

$$\begin{aligned} A + B + C &= -7 \\ A + 3B - 2C &= -19 \\ -6A &= 36 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt unmittelbar $A = -6$. Setzen wir dies in die ersten beiden Gleichungen ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} B + C &= -1, \\ 3B - 2C &= -13. \end{aligned}$$

Nun addieren wir das Doppelte der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} 5B &= -15 \\ \iff \qquad B &= -3. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wiederum

$$C = -1 - B = 2.$$

Wir haben jetzt (auf zwei Arten) die Partialbruchzerlegung bestimmt:

$$\frac{3x^4 + 2x^3 - 26x^2 - 13x + 36}{x^3 + x^2 - 6x} = 3x - 1 - \frac{6}{x} - \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

Unser gesuchtes Integral entspricht also

$$\begin{aligned} &\int 3x - 1dx - \int \frac{6}{x}dx - \int \frac{3}{x-2}dx + \int \frac{2}{x+3}dx \\ =&\frac{3}{2}x^2 - x - 6\ln|x| - 3\ln|x-2| + 2\ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

(b) Bei einer rationalen Funktion in e^x und hyperbolischen Funktionen können wir generell $u = e^x$ substituieren. Das bedeutet $x = \ln(u)$ und somit $dx = \frac{1}{u}du$. Die hyperbolischen Funktionen entsprechen per Definition $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{u + \frac{1}{u}}{2}$ und $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{u + \frac{1}{u}}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x \sinh(x)}{\cosh(x) + 1}dx &= \int \frac{u\frac{u - \frac{1}{u}}{2}}{\frac{u + \frac{1}{u}}{2} + 1} \cdot \frac{1}{u}du = \int \frac{u - \frac{1}{u}}{u + 2 + \frac{1}{u}}du \\ &= \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 2u + 1}du. \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir wieder die Partialbruchzerlegung. Zuerst dividieren wir den Zähler durch den Nenner.

$$\begin{array}{l} (\;u^2 \qquad\quad -1\big) : \big(u^2 + 2u + 1\big) = 1 + \dfrac{-2u - 2}{u^2 + 2u + 1} \\ \underline{\;-u^2 - 2u - 1\;} \\ \qquad\; -2u - 2 \end{array}$$

Der verbleibende Bruch entspricht $-2\frac{u+1}{u^2+2u+1} = \frac{-2}{u+1}$. Also haben wir

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x \sinh(x)}{\cosh(x) + 1}dx &= \int 1 - \frac{2}{u+1}du = u - 2\ln|u+1| + C \\ &= e^x - 2\ln(e^x + 1) + C. \end{aligned}$$

(c) Bei rationalen Funktionen in trigonometrischen Funktionen kann man generell $u = \tan(\frac{x}{2})$ substituieren.[1] In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ gilt.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}dx &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+1} \cdot \frac{2}{1+u^2}du \\
&= \int \frac{2\frac{1-u^2}{1+u^2}}{2u+1+u^2}du \\
&= \int \frac{2-2u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}du
\end{aligned}$$

Nun bestimmen wir die Partialbruchzerlegung. Der Grad des Zählers ist kleiner als der des Nenners, weshalb wir gleich zur Zerlegung in Brüche kommen. Da u^2+1 keine reellen Nullstellen hat, suchen wir eine Zerlegung der Form

$$\frac{2-2u^2}{(u+1)^2(u^2+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{Cu+D}{u^2+1}.$$

Multiplizieren wir mit dem Nenner der linken Seite, erhalten wir

$$\begin{aligned}
2-2u^2 &= A(u+1)(u^2+1) + B(u^2+1) + Cu(u+1)^2 + D(u+1)^2 \\
&= A(u^3+u^2+u+1) + B(u^2+1) + C(u^3+2u^2+u) + D(u^2+2u+1) \\
&= (A+C)u^3 + (A+B+2C+D)u^2 + (A+C+2D)u + (A+B+D).
\end{aligned}$$

In diesem Fall können wir A, B, C, D nicht durch Einsetzen der Nullstellen bestimmen, weil es nicht genügend reele Nullstellen gibt. Daher vergleichen wir wieder die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von u. Dadurch ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
A + C &= 0, \\
A + B + 2C + D &= -2, \\
A + C + 2D &= 0, \\
A + B + D &= 2.
\end{aligned}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt $D = 0$. Subtrahiert man die vierte von der zweiten Gleichung, erhält man $2C = -4$, also $C = -2$.

[1] Unter Umständen sind andere Substitutionen wie $u = \sin(x)$ oder $u = \cos(x)$ einfacher. In diesem Fall kann man zum Beispiel $u = \sin(x) + 1$ substituieren. Der Vorteil der Substitution $u = \tan(\frac{x}{2})$ ist aber, dass sie immer eine rationale Funktion liefert.

Mit der ersten Gleichung ergibt dies $A = 2$. Diese Werte setzt man nun in die zweite oder vierte Gleichung ein und sieht, dass $B = 0$. Wir haben also

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}dx &= \int \frac{2}{u+1} - \frac{2u}{u^2+1}du \\ &= 2\ln|u+1| - \ln(u^2+1) + C \\ &= 2\ln|\tan(\frac{x}{2})+1| - \ln(\tan^2(\frac{x}{2})+1) + C.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe von Partialbruchzerlegung

(a) $\displaystyle\int \frac{e^{2x} - e^x + 2}{e^x + 1}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{-2}{\sin^2(x)\cos(x)}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 4x - 3}{x^2+1}dx$

Lösung: (a) Hier substituieren wir $u = e^x$, was wie oben $dx = \frac{1}{u}du$ zur Folge hat.

$$\int \frac{e^{2x} - e^x + 2}{e^x+1}dx = \int \frac{u^2 - u + 2}{(u+1)u}du = \int \frac{u^2-u+2}{u^2+u}du$$

Zuerst dividieren wir den Zähler durch den Nenner.

$$\begin{array}{l}\big(\ u^2 \ - u + 2\big) : \big(u^2 + u\big) = 1 + \dfrac{-2u+2}{u^2+u} \\ \underline{-\,u^2 \ - u} \\ \quad\ -\,2u\end{array}$$

Den verbleibenden Bruch wollen wir nun als

$$\frac{-2u+2}{u^2+u} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

schreiben. Multiplizieren wir mit dem Nenner der linken Seite, ergibt sich

$$-2u + 2 = A(u+1) + Bu = (A+B)u + A.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten ergibt sich $A = 2$ und $B = -4$. Wir haben somit

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{2x} - e^x + 2}{e^x + 1} dx &= \int 1 + \frac{2}{u} - \frac{4}{u+1} du \\ &= u + 2\ln|u| - 4\ln|u+1| + C \\ &= e^x + 2x - 4\ln(e^x + 1) + C.\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $u = \tan(\frac{x}{2})$. Wie oben bedeutet dies $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2} du$. Es ist also

$$\begin{aligned}\int \frac{-2}{\sin^2(x)\cos(x)} dx &= \int \frac{-2}{\frac{4u^2(1-u^2)}{(1+u^2)^3}} \cdot \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{-(1+u^2)^2}{u^2(1-u^2)} du = \int \frac{u^4 + 2u^2 + 1}{u^4 - u^2} du.\end{aligned}$$

Nun dividieren wir wieder den Zähler durch den Nenner:

$$\begin{array}{l}\big(\quad u^4 + 2u^2 + 1\big) : \big(u^4 - u^2\big) = 1 + \dfrac{3u^2 + 1}{u^4 - u^2} \\ \underline{\;-u^4 \quad + u^2\;} \\ \qquad\quad 3u^2\end{array}$$

Den verbleibenden Bruch wollen wir als

$$\frac{3u^2 + 1}{u^4 - u^2} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} + \frac{D}{u-1}$$

darstellen. Wir multiplizieren wieder mit dem Nenner der linken Seite. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}3u^2 + 1 &= A(u^3 - u) + B(u^2 - 1) + C(u^3 - u^2) + D(u^3 + u^2) \\ &= (A + C + D)u^3 + (B - C + D)u^2 - Au - B.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich[2] erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}A + C + D &= 0, \\ B - C + D &= 3, \\ -A &= 0, \\ -B &= 1.\end{aligned}$$

[2] Auch hier funktioniert das Einsetzen der Nullstellen nicht, da es nur drei verschiedene Nullstellen gibt, wir aber vier Zahlen bestimmen wollen.

Die letzen beiden Gleichungen liefern unmittelbar $A = 0$ und $B = -1$. In die ersten beiden Gleichungen eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} C + D &= 0, \\ -C + D &= 4. \end{aligned}$$

Addiert man die beiden Gleichungen, erhält man $2D = 4$, also $D = 2$. Daraus folgt $C = -2$. Insgesamt haben wir damit

$$\begin{aligned} \int \frac{-2}{\sin^2(x)\cos(x)} dx = \int 1 - \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u+1} + \frac{2}{u-1} du \\ &= u + \frac{1}{u} - 2\ln|u+1| + 2\ln|u-1| + C \\ &= \tan(\frac{x}{2}) + \cot(\frac{x}{2}) - 2\ln|\tan(\frac{x}{2}) + 1| \\ &\quad + 2\ln|\tan(\frac{x}{2}) - 1| + C. \end{aligned}$$

(c) Wir beginnen damit, den Zähler durch den Nenner zu dividieren.

$$\begin{array}{l} \big(\quad 2x^3 + 4x - 3\big) : \big(x^2 + 1\big) = 2x + \dfrac{2x-3}{x^2+1} \\ \underline{\;-2x^3 - 2x\;} \\ \qquad\qquad\quad 2x \end{array}$$

Da x^2+1 keine reellen Nullstellen hat, ist der verbleibende Bruch bereits in seine Partialbrüche zerlegt. Wir haben also

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 4x - 3}{x^2+1} dx &= \int 2x + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1} dx \\ &= x^2 + \ln(x^2+1) - 3\arctan(x) + C. \end{aligned}$$

□