Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*
25. Januar 2013

***Aufgabe 1.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

(c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \ln(x^2)dx$

Lösung: (a) Wir versuchen es mit der Substitution $u = \sin(x)$, also $du = \cos(x)dx$.

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\pi)} u^5du = \int_0^0 u^5du.$$

Das Integral rechts ist 0, weil die Grenzen übereinstimmen.

Allerdings ist diese Substitution nicht erlaubt, weil $u = \sin(x)$ auch $x = \arcsin(u)$ bedeutet und der Arcussinus nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, aber x von 0 bis π laufen soll. Bei der Substitution in einem bestimmten Integral müssen wir immer darauf achten, dass die substituierte Funktion auf dem Integrationsintervall invertierbar (also streng monoton steigend oder fallend) ist.

Um dies zu erreichen, unterteilen wir das Intervall $[0,\pi]$ an der Stelle $\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\cos(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx$$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Im rechten Intervall substituiere $y = x - \frac{\pi}{2}$. Wegen $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$ und $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$ ist

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\cos(x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(y)\sin(y)dy.$$

Jetzt substituiere $u = \sin(x)$ und $v = \cos(y)$.

$$\int_0^\pi \sin^5(x)\cos(x)dx = \int_0^1 u^5 du + \int_1^0 v^5 dv = \int_0^1 u^5 du - \int_0^1 v^5 dv = 0.$$

Man kann das Problem mit der Substitution auch anders umgehen: Zunächst löst man mittels Substitution das unbestimmte Integral, dabei erhält man die Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{6}\sin^6(x)$. In die Stammfunktion setzt man dann die Werte 0 und π ein und erhält $F(\pi) - F(0) = 0 - 0 = 0$ als Wert des Integrals.

(b) Dieses Integral hat zwei kritische Grenzen: Die obere Grenze ist unendlich, an der unteren hat die Funktion eine Polstelle. Wir substituieren $u = \sqrt{x-1}$, also $x = u^2 + 1$ und $dx = 2u \cdot du$.

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \int_0^\infty \frac{2u}{(u^2+1)u}du &= \int_0^\infty \frac{2}{u^2+1}du \\ &= 2\arctan(u)\Big|_0^\infty\end{aligned}$$

Für $u \to \infty$ konvergiert der Arcustangens gegen $\frac{\pi}{2}$, daher ist

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Die Funktion hat eine Polstelle bei $x = 0$, also unterteilen wir das Intervall an dieser Stelle.

$$\int_{-1}^1 \ln(x^2)dx = \int_{-1}^0 \ln(x^2)dx + \int_0^1 \ln(x^2)dx$$

Nun nutzen wir aus, dass der Logarithmus die Eigenschaft $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ hat. Dies bedeutet, dass $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ für $x > 0$ gilt. Für $x < 0$ hingegen gilt $\ln(x^2) = \ln\big((-x)\cdot(-x)\big) = 2\ln(-x)$. Also

$$\int_{-1}^1 \ln(x^2)dx = \int_{-1}^0 2\ln(-x)dx + \int_0^1 2\ln(x)dx.$$

Nun substituieren wir im ersten Integral auf der rechten Seite $u = -x$, also $du = -dx$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \ln(x^2)dx &= \int_{1}^{0} 2\ln(u)(-du) + \int_{0}^{1} 2\ln(x)dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \ln(u)du + 2\int_{0}^{1} \ln(x)dx \\ &= 4\int_{0}^{1} \ln(x)dx\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion vom Logarithmus wurde in der Vorlesung bestimmt, es ist $x\ln(x) - x$. Der Vollständigkeit halber hier die Herleitung: Mittels partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int \ln(x)dx &= \int 1 \cdot \ln(x)dx \\ &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= x\ln(x) - \int 1dx \\ &= x\ln(x) - x + C.\end{aligned}$$

Unser gesuchtes Integral ist also

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)dx = 4\left[x\ln(x) - x\right]_0^1 = 4\big((1 \cdot 0 - 1) - \lim_{x\to 0^+}(x\ln(x) - x)\big).$$

Nun müssen wir noch den Grenzwert bestimmen. Der Summand $-x$ geht gegen 0, der Summand $x\ln(x)$ ist von der Form $0 \cdot \infty$, wir können also l'Hospital anwenden.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Somit haben wir

$$\int_{-1}^{1} \ln(x^2)dx = 4 \cdot (-1 - 0) = -4.$$

□

Aufgabe 2. Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2(x)dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}\right) dx$

Lösung: (a) Hier können wir partielle Integration anwenden:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin^2(x)dx &= \int_0^\pi \sin(x)\cdot\sin(x)dx \\
&= \Big[\sin(x)\cdot\big(-\cos(x)\big)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x)\cdot\big(-\cos(x)\big)dx \\
&= -\big[\sin(x)\cdot\cos(x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2(x)dx \\
&= -\big[\sin(x)\cdot\cos(x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi \big(1-\sin^2(x)\big)dx \\
&= -\big[\sin(x)\cdot\cos(x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi 1dx - \int_0^\pi \sin^2(x)dx \\
&= -\big[\sin(x)\cdot\cos(x)\big]_0^\pi + \big[x\big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2(x)dx
\end{aligned}$$

Nun bringen wir das Integral auf die andere Seite und teilen durch 2. Dadurch erhalten wir

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}\Big(\big[x\big]_0^\pi - \big[\sin(x)\cdot\cos(x)\big]_0^\pi\Big) = \frac{1}{2}\big(\pi-0-(0-0)\big) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Wir verwenden die Standardsubstitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Dann ist $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ und $dx = \frac{2}{1+u^2}du$, also

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx = \int_{\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}^{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \int_{-1}^{1}\frac{1}{u}du.$$

Die Funktion $\frac{1}{u}$ hat eine Polstelle bei 0, wir müssen das Intervall also an dieser Stelle unterteilen.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{u}du + \int_0^1 \frac{1}{u}du = \big[\ln|u|\big]_{-1}^0 + \big[\ln(u)\big]_0^1$$

Der Logarithmus konvergiert gegen $-\infty$ für $u \to 0$, also existiert das Integral nicht.

(c) Die Funktion hat eine Polstelle bei 1. Wir substituieren $x = \sin(u)$, also $dx = \cos(u)du$. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)\cos(u)}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)\cos(u)}{\cos(u)}du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du.\end{aligned}$$

Wie bei (a) erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)du &= \frac{1}{2}\left(\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - (0-0)\right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

(d) Wir bestimmen zunächst eine Stammfunktion des Integranden. Es ist

$$\int \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite versuchen wir nun mit partieller Integration zu lösen. Dazu wählen wir $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, also $g(x) = \arctan(x)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx &= \frac{\arctan(x)}{x} - \int \left(-\frac{\arctan(x)}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx.\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral hier ist genau das gleiche Integral wie oben auf der rechten Seite, nur mit anderem Vorzeichen. Die beiden Integrale heben sich also weg und wir haben

$$\int \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}\right) dx = \frac{\arctan(x)}{x} + C.$$

Nun setzen wir die Grenzen ein:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2}\right) dx = \left[\frac{\arctan(x)}{x}\right]_0^{\infty}$$

Für $x \to \infty$ konvergiert der Arcustangens gegen $\frac{\pi}{2}$, also geht $\frac{\arctan(x)}{x}$ gegen 0. Für $x \to 0$ gehen sowohl Zähler als auch Nenner gegen 0, wir müssen also l'Hospital anwenden.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Dies liefert uns

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{\arctan(x)}{x^2} \right) dx = 0 - 1 = -1.$$

$\square$