Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

1. Februar 2013

***Aufgabe 1.** Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen!

(a) $y' - 1 = \dfrac{y}{x}$, wobei $x > 0$

(b) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x$

Lösung: In der Vorlesung wurde ein Lösungsprinzip für Differentialgleichungen vorgestellt, die von der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ sind. Andersartige Differentialgleichungen kann man nicht immer direkt lösen, aber unter Umständen auf diese lösbare Form zurück führen. Wie bei Integralen kann man auch in Differentialgleichungen substituieren. Eine Substitution, die in einigen Fällen zum Erfolg führt, ist $y = z \cdot x$. Aber auch andere Varianten wie $y = \frac{z}{x}$, $y = z\sqrt{x}$ oder $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ können nützlich sein. Wir stellen hier an den Beispielen eine Möglichkeit vor, wie man entscheiden kann, welche Substitution zu wählen ist. Dieses Verfahren wird immer dann funktionieren, wenn die Differentialgleichung von der Form

$$y' = f(x)y + g(x)h(y)$$

ist.

(a) Zunächst bringen wir die Differentialgleichung auf die übliche Form, bei der y' links steht und alles andere rechts. Die Differentialgleichung entspricht dann

$$y' = 1 + \frac{y}{x}.$$

Wir können die rechte Seite nicht als Produkt einer Funktion in x und einer Funktion in y schreiben, also versuchen wir zuerst eine Substitution. Da wir aber im Vorhinein nicht wissen, welche der oben genannten

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

Substitutionen helfen wird (oder ob wir gar eine ganz andere brauchen), setzen wir zunächst $y = z \cdot u$ an, wobei sowohl z als auch u Funktionen sind. Dann versuchen wir, u so zu wählen, dass sich die Differentialgleichung vereinfacht. Es ist

$$y' = z'u + zu'$$

und somit ändert sich unsere Differentialgleichung in

$$z'u + zu' = 1 + \frac{zu}{x}.$$

Die Differentialgleichung wird offensichtlich einfacher, wenn sich alle Terme mit einem Faktor z wegheben. Dafür muss $u' = \frac{u}{x}$ gelten. Dies ist eine weitere Differentialgleichung, die wir aber leicht lösen können, denn

$$\begin{aligned}
& & u' &= \frac{u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{dx} &= \frac{u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{u} &= \frac{dx}{x} \\
&\iff & \int \frac{1}{u} du &= \int \frac{1}{x} dx \\
&\iff & \ln(u) &= \ln(x) \\
&\iff & u &= x.
\end{aligned}$$

(Die Konstante beim Integrieren können wir in diesem Fall weglassen, weil wir für u nur eine Lösung brauchen und nicht alle.) Setzen wir also $u = x$ oben ein, bekommen wir

$$\begin{aligned}
& & z'x + z &= 1 + \frac{zx}{x} \\
&\iff & z'x &= 1 \\
&\iff & z' &= \frac{1}{x} \\
&\iff & \frac{dz}{dx} &= \frac{1}{x} \\
&\iff & dz &= \frac{dx}{x} \\
&\iff & \int 1 dz &= \int \frac{1}{x} dx \\
&\iff & z &= \ln(x) + C.
\end{aligned}$$

Um y zu erhalten, müssen wir zurück substituieren. Es war $y = zu = zx$, also sind die Lösungen der Differentialgleichung von der Form

$$y = x\ln(x) + Cx.$$

(b) Wieder stellen wir die Differentialgleichung zuerst um und erhalten

$$y' = e^x - \frac{y}{x}.$$

Wieder können wir die rechte Seite nicht nach x und y aufteilen, also versuchen wir wieder den Ansatz $y = zu$. Dann ergibt sich

$$z'u + zu' = e^x - \frac{zu}{x}.$$

Erneut sehen wir, dass die Differentialgleichung einfacher wird, falls sich die Terme mit Faktor z wegheben, was genau für $u' = -\frac{u}{x}$ der Fall ist. Diese neue Differentialgleichung lösen wir nun.

$$\begin{aligned}
& & u' &= -\frac{u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{dx} &= -\frac{u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{u} &= -\frac{dx}{x} \\
&\iff & \int \frac{1}{u}du &= -\int \frac{1}{x}dx \\
&\iff & \ln(u) &= -\ln(x) \\
&\iff & u &= \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Wir setzen also oben $u = \frac{1}{x}$ ein und erhalten

$$\begin{aligned}
& & z'\frac{1}{x} - \frac{z}{x^2} &= e^x - \frac{z}{x^2} \\
&\iff & z' &= xe^x \\
&\iff & \frac{dz}{dx} &= xe^x \\
&\iff & dz &= xe^x dx \\
&\iff & \int 1dz &= \int xe^x dx \\
&\iff & z &= xe^x - \int e^x dx \\
& & &= xe^x - e^x + C \\
& & &= (x-1)e^x + C.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir zum Bestimmen von $\int xe^x dx$ partielle Integration benutzt. Nun substituieren wir zurück: $y = zu = \frac{z}{x}$, also

$$y = \frac{x-1}{x}e^x + \frac{C}{x}. \qquad \square$$

Aufgabe 2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen!

(a) $y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{1}{2y}$

(b) $y = xy' + y^2$

(c) $3y' - 2xy + x = 0$

(d) $xy' - 4y = x^2y^3$

Lösung: (a) Diese Differentialgleichung ist bereits in der üblichen Form. Wir können nicht nach x und y trennen, also verwenden wir wieder den Ansatz $y = zu$. Dadurch bekommen wir

$$z'u + zu' = \frac{zu}{2x} - \frac{1}{2zu}.$$

Die Terme mit Faktor z fallen weg, wenn $u' = \frac{u}{2x}$ gilt.

$$\begin{aligned}
& & u' &= \frac{u}{2x} \\
&\iff & \frac{du}{dx} &= \frac{u}{2x} \\
&\iff & \frac{du}{u} &= \frac{dx}{2x} \\
&\iff & \int \frac{1}{u}du &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx \\
&\iff & \ln(u) &= \frac{1}{2}\ln(x) \\
&\iff & u &= \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Wir setzen $u = \sqrt{x}$ oben ein und bekommen

$$\begin{aligned}
&& z'\sqrt{x} + z\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{z\sqrt{x}}{2x} - \frac{1}{2z\sqrt{x}} \\
\Longleftrightarrow && z'\sqrt{x} &= -\frac{1}{2z\sqrt{x}} \\
\Longleftrightarrow && z' &= -\frac{1}{2zx} \\
\Longleftrightarrow && \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{2zx} \\
\Longleftrightarrow && z \cdot dz &= -\frac{dx}{2x} \\
\Longleftrightarrow && \int z \cdot dz &= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x} dx \\
\Longleftrightarrow && \frac{1}{2}z^2 &= -\frac{1}{2}\ln(x) + C \\
\Longleftrightarrow && z^2 &= -\ln(x) + C_1 \\
\Longleftrightarrow && z &= \pm\sqrt{C_1 - \ln(x)}.
\end{aligned}$$

Zuletzt substituieren wir noch zurück: $y = zu = z\sqrt{x}$, also

$$y = \pm\sqrt{C_1 x - x\ln(x)}.$$

(b) Wir sortieren um und erhalten

$$y' = \frac{y - y^2}{x}.$$

In diesem Fall sind x und y getrennt, wir könne also direkt lösen.

$$\begin{aligned}
&& y' &= \frac{y - y^2}{x} \\
\Longleftrightarrow && \frac{dy}{dx} &= \frac{y - y^2}{x} \\
\Longleftrightarrow && \frac{dy}{y - y^2} &= \frac{dx}{x} \\
\Longleftrightarrow && \int \frac{1}{y - y^2} dy &= \int \frac{1}{x} dx
\end{aligned}$$

Um das linke Integral zu lösen, brauchen wir die Partialbruchzerlegung des Integranden, also A, B mit

$$\frac{1}{y - y^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y - 1}.$$

Mit $y - y^2$ multipliziert ergibt sich daraus

$$1 = A(1-y) - By = A - (A+B)y,$$

also $A = 1$ und $B = -1$.

Wir haben somit

$$\begin{aligned}
&& \int \frac{1}{y-y^2}dy &= \int \frac{1}{x}dx \\
\iff && \int \frac{1}{y}dy - \int \frac{1}{y-1}dy &= \int \frac{1}{x}dx \\
\iff && \ln(y) - \ln(y-1) &= \ln(x) + C \\
\iff && \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) &= \ln(x) + C \\
\iff && \frac{y}{y-1} &= C_1 x \\
\iff && 1 + \frac{1}{y-1} &= C_1 x \\
\iff && y &= \frac{1}{C_1 x - 1} + 1
\end{aligned}$$

(c) Wir stellen wieder um:

$$y' = \frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3}x(2y-1)$$

Wir können direkt lösen.

$$\begin{aligned}
&& y' &= \frac{1}{3}x(2y-1) \\
\iff && \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x(2y-1) \\
\iff && \frac{dy}{2y-1} &= \frac{x}{3}dx \\
\iff && \int \frac{1}{2y-1}dy &= \int \frac{x}{3}dx \\
\iff && \frac{1}{2}\ln(2y-1) &= \frac{x^2}{6} + C \\
\iff && 2y-1 &= C_1 \exp\left(\frac{x^2}{3}\right) \\
\iff && y &= C_2 \exp\left(\frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(d) Wir stellen um und erhalten

$$y' = xy^3 + \frac{4y}{x}.$$

Dies können wir nicht nach x und y trennen, also setzen wir wieder $y = zu$ an.

$$z'u + zu' = xz^3u^3 + \frac{4zu}{x}$$

Die Terme mit Faktor z heben sich weg, falls $u' = \frac{4u}{x}$ gilt.

$$\begin{aligned}
& & u' &= \frac{4u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{dx} &= \frac{4u}{x} \\
&\iff & \frac{du}{u} &= \frac{4dx}{x} \\
&\iff & \int \frac{1}{u} du &= 4 \int \frac{1}{x} dx \\
&\iff & \ln(u) &= 4\ln(x) \\
&\iff & u &= x^4
\end{aligned}$$

Dies setzen wir wieder oben ein und bekommen

$$\begin{aligned}
& & z'x^4 + z4x^3 &= x^{13}z^3 + \frac{4x^4z}{x} \\
&\iff & z' &= x^9z^3 \\
&\iff & \frac{dz}{dx} &= x^9z^3 \\
&\iff & \frac{dz}{z^3} &= x^9dx \\
&\iff & \int \frac{1}{z^3} dz &= \int x^9 dx \\
&\iff & -\frac{1}{2z^2} &= \frac{1}{10}x^{10} + C \\
&\iff & z &= \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}x^{10} + C_1}}.
\end{aligned}$$

Zuletzt setzen wir noch $y = zu = zx^4$ ein:

$$y = \pm\frac{x^4}{\sqrt{\frac{1}{5}x^{10} + C_1}}$$

□