Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*
12. Oktober 2012

***Aufgabe 1.** Zeigen Sie
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$
für $n \geq k+1$.

Lösung: Mit der Darstellung des Binomialkoeffizienten durch Fakultäten erhalten wir
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}.$$
Um die beiden Brüche auf den gleichen Nenner zu bringen, erweitern wir den ersten mit $k+1$ und den zweiten mit $n-k$. Dies gibt uns
$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!\big((k+1)+(n-k)\big)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Man kann diese Aufgabe auch ohne Rechnen lösen: $\binom{n+1}{k+1}$ entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, aus $n+1$ Objekten $k+1$ auszuwählen. Betrachtet man ein bestimmtes der $n+1$ Objekte, dann kann die Auswahl dieses Objekt entweder enthalten oder nicht. Enthält sie das bestimmte Objekt, dann enthält sie k der restlichen n Objekte. Enthält sie das bestimmte Objekt nicht, dann enthält sie $k+1$ der restlichen n Objekte. Von den in $\binom{n+1}{k+1}$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

gezählten Auswahlmöglichkeiten zählt $\binom{n}{k}$ also genau diejenigen, die das bestimmte Objekt enthalten, während $\binom{n}{k+1}$ genau diejenigen zählt, die es nicht enthalten. Also gilt

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

wie gewünscht. $\square$

***Aufgabe 2.** Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die durch A, B, C definierte Ebene $\mathcal{E}$ in parameterfreier Form an.

(b) Welchen Abstand hat der Punkt D von der Ebene $\mathcal{E}$?

(c) Wir betrachten die Gerade

$$g \colon \vec{x} = D + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In welchem Punkt schneidet g die Ebene $\mathcal{E}$? In welchem Winkel?

Lösung: (a) Um die parameterfreie Form der Ebene zu erhalten, berechnen wir zuerst den Normalenvektor $\vec{n}$. Dieser ergibt sich als Kreuzprodukt von $B - A$ und $C - A$:

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \\ -2 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \\ -1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für die parameterfreie Darstellung ist nur die Richtung von $\vec{n}$ entscheidend. Wir können $\vec{n}$ also um den Faktor -2 kürzen und erhalten für die

Ebene eine Gleichung der Form $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = x + y - z = \text{const}$. Um die fehlende Konstante zu berechnen, setzen wir einen der drei gegebenen Punkte ein, sagen wir A, und erhalten $\text{const.} = 3 + 0 - (-1) = 4$. Die parameterfreie Form von $\mathcal{E}$ lautet also

$$x + y - z = 4.$$

(b) Für die Berechnung des Abstandes von D zu $\mathcal{E}$ gibt es mehrere Wege. Man kann die Gerade $\vec{x} = D + s\vec{n}$ betrachten, durch Einsetzen in die obige Gleichung der Ebene den Schnittpunkt herausfinden (wie es für eine andere Gerade im nächsten Aufgabenteil der Fall sein wird) und seinen Abstand zu D berechnen.

Wir wählen einen alternativen Weg. Wir wissen, dass

$$\frac{(D - A) \cdot \vec{n}}{|D - A| \cdot |\vec{n}|} = \cos(\alpha),$$

wobei α den Winkel zwischen den beiden Vektoren $D - A$ und $\vec{n}$ bezeichnet. Nun ist $\big| |D - A| \cos(\alpha) \big|$ die Länge der Projektion von $D - A$ auf $\vec{n}$, was genau dem Abstand von D zu $\mathcal{E}$ entspricht, siehe Abbildung 1.

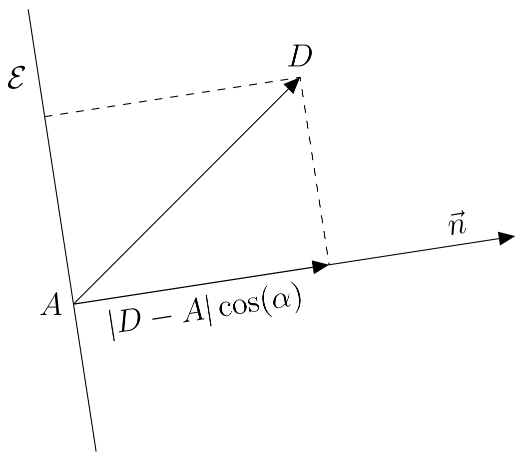

Abbildung 1: Abstand von D zu $\mathcal{E}$.

Der gesuchte Abstand ist also

$$\big| |D - A| \cos(\alpha) \big| = \left| \frac{(D - A) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 2}{\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 2^2}} \right|$$
$$= \left| \frac{-6}{\sqrt{12}} \right| = \sqrt{3}.$$

(c) Setzen wir die Geradengleichung von g in die Ebenengleichung von $\mathcal{E}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&& (5+s)+(2+2s)-(0+s) &= 4 \\
\Leftrightarrow && 2s+7 &= 4 \\
\Leftrightarrow && s &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Die Gerade g schneidet $\mathcal{E}$ also im Punkt

$$D - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Für den Winkel zwischen g und $\mathcal{E}$ berechnen wir zunächst den Winkel α zwischen $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot(-2)+2\cdot(-2)+1\cdot 2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}} \\
&= \frac{-4}{\sqrt{72}} = -\frac{4}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{3},
\end{aligned}$$

also $\alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 118.1255°$. Da $\vec{n}$ senkrecht auf $\mathcal{E}$ steht, schneidet g daher $\mathcal{E}$ im Winkel $\alpha - 90° = 28.1255°$.

□

Aufgabe 3. Zeigen Sie

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

für $n \geq k$.

Lösung: Mit der Darstellung des Binomialkoeffizienten durch Fakultäten erhalten wir

$$\begin{aligned}
k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

Auch hier kann man ohne Rechnen argumentieren: Wählt man aus n Objekten zunächst ein einzelnes Objekt aus und wählt dann $k-1$ weitere Objekte aus den verbleibenden $n-1$ Objekten, dann hat man für die erste Wahl n Möglichkeiten und für die zweite Wahl $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten, insgesamt also $n\binom{n-1}{k-1}$. Auf diese Weise wählt man k Objekte aus n Objekten aus. Allerdings erhält man jede Auswahl von k Objekten auf k verschiedene Weisen, denn es gibt k Möglichkeiten, welches der k Objekte man im ersten Schritt gewählt hat. Wir haben also jede der $\binom{n}{k}$ Auswahlmöglichkeiten k mal gezählt und somit

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

wie gewünscht. □

Aufgabe 4. Gegeben sind die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die durch A, B, C definierte Ebene $\mathcal{E}$ in parameterfreier Form an.

(b) Welchen Abstand hat der Punkt D von der Ebene $\mathcal{E}$?

(c) Wir betrachten die Gerade

$$g\colon \vec{x} = D + s\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

In welchem Punkt schneidet g die Ebene $\mathcal{E}$? In welchem Winkel?

(d) Berechnen Sie das Volumen der Dreieckspyramide mit Eckpunkten A, B, C, D.

Lösung: (a) Wie bei Aufgabe 2 berechnen wir zuerst den Normalenvektor $\vec{n}$ als Kreuzprodukt von $B-A$ und $C-A$:

$$\begin{aligned}
\vec{n} &= \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - (-4)\cdot(-3) \\ -4\cdot 0 - 3\cdot 0 \\ 3\cdot(-3) - 1\cdot 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Erneut ist nur die Richtung von $\vec{n}$ entscheidend. Wir können $\vec{n}$ also um den Faktor -4 kürzen und erhalten für die Ebene eine Gleichung der Form $\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 4x + 3z = \text{const}$. Um die fehlende Konstante zu berechnen, setzen wir einen der drei gegebenen Punkte ein, sagen wir A, und erhalten $\text{const.} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 = 11$. Die parameterfreie Form von $\mathcal{E}$ lautet also

$$4x + 3z = 11.$$

(b) Wie in Aufgabe 2 berechnen wir den Abstand als

$$\begin{aligned}\big||D - A|\cos(\alpha)\big| &= \left|\frac{(D-A)\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{7\cdot(-12) + (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot(-9)}{\sqrt{(-12)^2 + 0^2 + (-9)^2}}\right| \\ &= \left|\frac{-75}{15}\right| = 5.\end{aligned}$$

(c) Setzen wir die Geradengleichung von g in die Ebenengleichung von $\mathcal{E}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & & 4(6+4s) + 3(4+3s) &= 11 \\ &\Leftrightarrow & 25s + 36 &= 11 \\ &\Leftrightarrow & s &= -1 \end{aligned}$$

Die Gerade g schneidet $\mathcal{E}$ also im Punkt

$$D - \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}.$$

Für den Winkel zwischen g und $\mathcal{E}$ berechnen wir zunächst den Winkel α zwischen $\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix}-12\\0\\-9\end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-12\\0\\-9\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-12\\0\\-9\end{pmatrix}\right|} = \frac{4\cdot(-12) + 5\cdot 0 + 3\cdot(-9)}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{225}} \\ &= \frac{-75}{75\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

also $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 135°$. Da $\vec{n}$ senkrecht auf $\mathcal{E}$ steht, schneidet g daher $\mathcal{E}$ im Winkel $\alpha - 90° = 45°$.

(d) Das Volumen einer Pyramide entspricht einem Drittel des Produktes ihrer Grundfläche mit ihrer Höhe. Die Fläche des Dreiecks ABC entspricht der Hälfte des Betrages von $\vec{n}$, also $\frac{15}{2}$. Die Höhe ist der Abstand von D zu $\mathcal{E}$, welchen wir bereits als 5 berechnet haben. Das Volumen der Pyramide ist also $\frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} \cdot 5 = \frac{25}{2}$.

$\square$