Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

19. Oktober 2012

***Aufgabe 1.** Ein *Fischauge* ist ein Objektiv in der Photographie, welches einen sehr großen Bildwinkel (gewöhnlich 180°) abbilden kann. Hierfür muss das Bild zum Rand hin stark verzerrt werden. Wir simulieren diese Verzerrung in der Gauß'schen Zahlenebene durch die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z}{|z| + a}, \quad \text{für } a > 0.$$

(a) Stellen Sie die komplexe Zahl z in Polarkoordinaten dar. Welche Auswirkung hat die Anwendung von f auf Betrag und Argument?

(b) Zeigen Sie $f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und geben Sie die Umkehrfunktion an.

(c) Auf welche geometrischen Objekte werden Geraden in $\mathbb{C}$ durch f abgebildet? Was geschieht mit Kreisen mit 0 als Mittelpunkt?

Lösung: (a) Wir schreiben $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$. Für $f(z)$ erhalten wir dann

$$f(z) = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r + a} = \frac{r}{r + a}(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Der Betrag von $f(z)$ ist also $\frac{r}{r+a}$, das Argument ist gleich dem Argument von z.

(b) Eine Zahl in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ schreiben wir als $y = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Um eine Zahl z mit $f(z) = y$ zu bekommen, müssen wir nach dem ersten Aufgabenteil nur ein r mit $\frac{r}{r+a} = s$ finden, $z = t(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

wird dann passend sein. Es gilt

$$\begin{aligned}
&& s &= \frac{r}{r+a} = \frac{r+a-a}{r+a} = 1 - \frac{a}{r+a} \\
\Leftrightarrow && 1-s &= \frac{a}{r+a} \\
\Leftrightarrow && r+a &= \frac{a}{1-s} \\
\Leftrightarrow && r &= \frac{a}{1-s} - a = \frac{a-a(1-s)}{1-s} = \frac{as}{1-s}.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Multiplikation mit $r+a$ zulässig ist, weil a positiv und r nicht negativ (also $r + a \neq 0$) ist. Gleiches gilt für die Division durch $1 - s$, da $s < 1$ ist. Daher ist jeder Punkt in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ Bild eines Punktes in $\mathbb{C}$.

Die Umkehrfunktion von f ist somit

$$f^{-1}(y) = \frac{as(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1-s} = \frac{ay}{1-|y|}.$$

(c) Geraden durch den Punkt 0 werden, da f das Argument nicht ändert, auf ihren Abschnitt in $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ abgebildet. Jede andere Gerade lässt sich durch eine Drehung um den Punkt 0 in eine Gerade der Form $c+ti$ mit $c > 0$ überführen. Es genügt also, die Bilder solcher senkrechter Geraden zu betrachten, die Bilder anderer Geraden erhält man dann, indem man das berechnete Bild um den entsprechenden Winkel wieder zurück dreht.

Für $z = c + ti$ folgt

$$f(z) = \frac{c+ti}{\sqrt{c^2+t^2}+a}.$$

Für $t = 0$ entspricht dies dem Punkt $\frac{c}{c+a}$. Für $t \to \infty$ tendiert der Wert gegen i, für $t \to -\infty$ gegen $-i$. Es handelt sich also um eine Kurve von $-i$ nach i, welche die reelle Achse im Punkt $\frac{c}{c+a}$ schneidet. In Abbildung c sind einige Beispiele für solche Kurven zu sehen. Für $c \to 0$ nähert sich die Kurve der imaginären Achse an, für $c \to \infty$ dem rechten Halbkreis.

Die Bilder von Kreisen um den Punkt 0 sind ebenfalls Kreise um den Punkt 0, lediglich der Radius ist gemäß der Formel $|f(z)| = \frac{|z|}{|z|+a}$ kleiner geworden.

$\square$

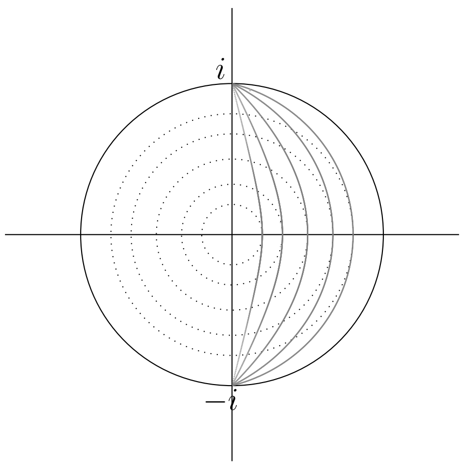

Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe 1. Bilder der Geraden $z = c + ti$ für $a = 1$ und $c = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$, sowie der Kreise um den Punkt 0 mit Radius $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Funktion g, die jede komplexe Zahl $z \neq 0$ auf $\frac{1}{z}$ abbildet.

(a) Welche Auswirkung hat die Anwendung von g auf Betrag und Argument einer komplexen Zahl?

(b) Bestimmen Sie die Bildmenge von g und geben Sie die Umkehrfunktion an.

(c) Auf welche geometrischen Objekte werden Geraden in $\mathbb{C}$ durch g abgebildet? Was geschieht mit Kreisen mit 0 als Mittelpunkt? Für welche weiteren Kreise können Sie das Bild noch angeben?

Lösung: (a) Schreiben wir $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ergibt sich

$$g(z) = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}.$$

Diesen Bruch können wir mit $\cos\varphi - i\sin\varphi$ erweitern, wobei wir den Nenner $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi$ erhalten, welcher stets 1 ist. Aufgrund der Regeln $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ bekommen wir also:

$$g(z) = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Der Betrag von $g(z)$ verhält sich also invers zum Betrag von z und das Argument von $g(z)$ ist das Negative vom Argument von z.

Mit der Darstellung $z = re^{i\varphi}$ lässt sich dies noch leichter sehen:

$$g(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$$

(b) Nach dem vorherigen Aufgabenteil bildet g keine Zahl auf 0 ab. Alle anderen Zahlen z sind Bild von $g(z)$, denn offensichtlich gilt $g(g(z)) = \frac{1}{\frac{1}{z}} = z$. Dementsprechend ist g auch seine eigene Umkehrfunktion.

(c) Geraden durch den Punkt 0 werden (wenn man den Punkt 0 entfernt, auf dem g ja nicht definiert ist) durch g auf ihre Spiegelung an der reellen Achse abgebildet, da g den Winkel in sein Negatives ändert. Hierbei werden zusätzlich „innen“ (nahe dem Punkt 0) und „außen“ (Betrag gegen ∞) vertauscht, da g den Betrag invertiert.

Wie bei Aufgabe 1 ist die Situation symmetrisch unter Rotationen um den Punkt 0, wir müssen daher nur Geraden der Form $c+ti$ betrachten. Der Punkt c wird durch g auf $\frac{1}{c}$ abgebildet, für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$ geht das Bild von $c+ti$ gegen 0. Zeichnet man sich ein paar Punkte auf, kann man sehen, dass es sich bei dem Bild der Geraden um einen Kreis handeln könnte. Dessen Mittelpunkt muss dabei offenbar in der Mitte zwischen 0 und $\frac{1}{c}$ liegen, also bei $\frac{1}{2c}$. Dass dies tatsächlich der Fall ist, können wir nachrechnen: Damit $g(c+ti) = \frac{1}{c+ti}$ auf diesem Kreis liegt, muss

$$\left|\frac{1}{c+ti} - \frac{1}{2c}\right|^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

gelten. Wir rechnen die linke Seite aus. Hierbei erweitern wir zuerst den linken Bruch mit $c - ti$, um den Nenner reell zu machen. Danach bringen wir beide Brüche auf den gleichen Nenner.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{c+ti} - \frac{1}{2c}\right|^2 &= \left|\frac{c-ti}{c^2+t^2} - \frac{1}{2c}\right|^2 \\
&= \left|\frac{2c^2-2cti}{2c(c^2+t^2)} - \frac{c^2+t^2}{2c(c^2+t^2)}\right|^2 \\
&= \left|\frac{c^2-2cti-t^2}{2c(c^2+t^2)}\right|^2 = \left|\frac{(c-ti)^2}{2c(c^2+t^2)}\right|^2
\end{aligned}$$

Der Nenner ist reell, wir können ihn also aus dem Betrag heraus ziehen (dabei das Quadrat beachten!).

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{c+ti}-\frac{1}{2c}\right|^2 &= \frac{|(c-ti)^2|^2}{(2c(c^2+t^2))^2} = \frac{(|c-ti|^2)^2}{4c^2(c^2+t^2)^2}\\ &= \frac{(c^2+t^2)^2}{4c^2(c^2+t^2)^2} = \frac{1}{4c^2} = \left(\frac{1}{2c}\right)^2\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass es sich bei dem Bild tatsächlich um den Kreis mit Radius $\frac{1}{2c}$ um den Punkt $\frac{1}{2c}$ handelt, wobei der Punkt 0 nicht getroffen wird.

Kreise um den Punkt 0 werden wie in Aufgabe 1 wieder auf Kreise um 0 abgebildet, wobei sich in diesem Fall der Radius ins Inverse verändert. Für Kreise, die durch den Punkt 0 verlaufen, können wir das Bild unter g (wenn man den Punkt 0 aus ihnen entfernt) ebenfalls beschreiben: Da man solche Kreise als Bild von Geraden erhält und g seine eigene Umkehrfunktion ist, wird jeder solche Kreis auf eine Gerade abgebildet.

□

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{1}{(z-1-i)(z-1)+iz+1-i} = \frac{i}{z^2-2z+2}.$$

Lösung: Berechnet man

$$(z-1-i)(z-1)+iz+1-i = (z-1)^2 - i(z-1)+iz+1-i = z^2-2z+2,$$

dann ergibt sich

$$\frac{1}{z^2-2z+2} = \frac{i}{z^2-2z+2}.$$

Da dies eine falsche Aussage ist, hat die Gleichung keine Lösungen.

Geht man anders vor und multipliziert in der Ausgangsgleichung zunächst mit beiden Nennern, erhält man

$$z^2-2z+2 = i((z-1-i)(z-1)+iz+1-i).$$

Nach der obigen Rechnung entspricht dies

$$\begin{aligned} & z^2-2z+2 = i(z^2-2z+2)\\ \Leftrightarrow\quad & (1-i)(z^2-2z+2) = 0\\ \Leftrightarrow\quad & z^2-2z+2 = 0.\end{aligned}$$

Die Lösungen dieser Gleichung berechnet man als $1 + i$ und $1 - i$. Dies widerspricht scheinbar unserem Ergebnis von oben. Allerdings haben wir im ersten Schritt mit den beiden Nennern multipliziert. Setzen wir in diese die Werte $1+i$ und $1-i$ für z ein, sehen wir, dass es sich dabei um Nullstellen der Nenner handelt. Für diese Werte von z haben wir im ersten Schritt also mit 0 multipliziert, weshalb unsere Folgerungen ab diesem Schritt falsch waren. $\square$