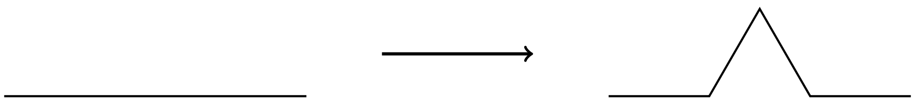
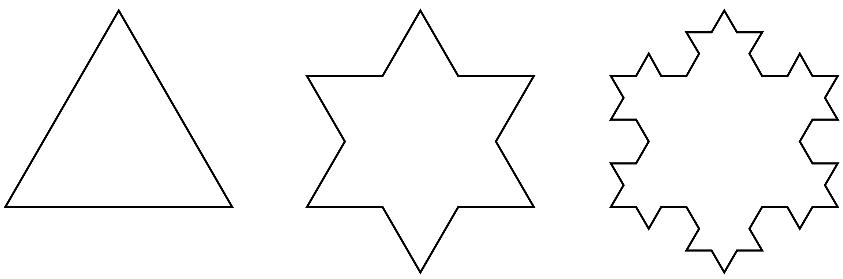
Tutorium Mathematik I, M
Lösungen[*]

9. November 2012

***Aufgabe 1.** Unter der Koch'schen Schneeflockenkurve versteht man die Kurve, welche durch die folgende Iteration entsteht: Beginnend mit einem gleichseitigen Dreieck der Kantenlänge 1 wird in jedem Schritt das mittlere Drittel jeder Kante durch zwei Strecken der gleichen Länge ersetzt. Hierbei



weist die 'Spitze' der neuen Strecken stets nach außen. Die ersten drei Iterationsschritte sehen wie folgt aus:



Bestimmen Sie die Länge der Kurve sowie die eingeschlossene Fläche im n-ten Iterationsschritt ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Wie groß ist die Fläche, die vom Grenzwert der Kurve eingeschlossen wird? Was ist ihr Umfang?

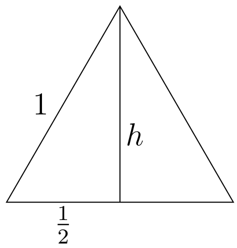
Lösung: Zunächst berechnen wir die Länge der Kurve. Zu Anfang, also im Schritt 0, hat sie offensichtlich die Länge 3. In jedem folgenden Schritt wird aus jeder Kante ein Abschnitt entfernt, der ein Drittel ihrer Länge hat, und es werden zwei Abschnitte hinzugefügt, die ebenfalls ein Drittel der Länge der Kante haben. Insgesamt vergrößert sich die Länge also um ein Drittel

[*] Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

der bisherigen Länge. Somit wird die Länge in jedem Schritt um den Faktor $\frac{4}{3}$ vergrößert und die Länge im n-ten Schritt ist

$$l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Für die eingeschlossene Fläche benötigen wir zuerst die Fläche des gleichseitigen Dreiecks. Der Satz des Pythagoras liefert uns die Höhe des Dreiecks: $h = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Der Flächeninhalt ist somit $A_0 = \frac{1}{2}h \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.



Im nächsten Schritt kommen nun Dreiecke der Kantenlängen $\frac{1}{3}$ hinzu, dann Dreiecke der Kantenlängen $\frac{1}{9}$ und so weiter. Deren Flächeninhalt ist dann $\frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \ldots$ von A_0. Aber wie viele Dreiecke werden im n-ten Schritt hinzugefügt? Nach der Konstruktionsvorschrift wird für jede Kante, die im $(n-1)$-ten Schritt vorhanden ist, ein Dreieck hinzugefügt. Im Schritt 0 hat die Kurve 3 Kanten und in jedem folgenden Schritt wächst die Zahl der Kanten um den Faktor 4, da jede Kante durch 4 kürzere Kanten ersetzt wird. Somit haben wir $3 \cdot 4^n$ Kanten im n-ten Schritt.

Die eingeschlossene Fläche im n-ten Schritt ist daher um $3 \cdot 4^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n A_0$ größer als die Fläche im Schritt zuvor. Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_n = A_0 + \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k A_0 &= A_0 \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) \\ &= A_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k\right). \end{aligned}$$

Die Summe können wir noch mit $\frac{5}{9} = 1 - \frac{4}{9}$ erweitern. Dabei erhalten wir den Zähler $1 - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$. Alle Summanden bis auf den ersten und den letzten heben sich auf und somit erhalten wir für die Summe den Wert

$$\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$$

und für den Flächeninhalt

$$A_n = A_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{27}{20} \left(1 - \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1} \right) \right).$$

Für $n \to \infty$ geht der Flächeninhalt gegen

$$A = A_0 \left(\frac{1}{4} + \frac{27}{20} \right) = \frac{8}{5} A_0 = \frac{2}{5}\sqrt{3}.$$

Der Umfang der Fläche wird unendlich groß, da die Folge der Kurvenlängen l_n divergiert. □

Aufgabe 2. Ein Kondensator K_1 (Kapazität C_1) mit Spannung U_0 und Ladung Q_0 soll mit Hilfe eines Kondensators K_2 (Kapazität C_2) sukzessive entladen werden. Ein Entladungsschritt läuft dabei wie folgt ab:

- K_1 und K_2 verbinden
- Spannungen der Kondensatoren angleichen
- Verbindungen lösen
- K_2 entladen

(a) Mit dem Kondensatorgesetz $Q = C \cdot U$ berechne man die Ladung Q_n und die Spannung U_n von K_1 nach dem n-ten Entladungsschritt.

(b) Man gebe an, wie groß N mindestens sein muss, damit $U_N < \frac{U_0}{100}$ gilt. (Wählen Sie z. B. $C_1 = 100\mu\text{F}$ und $C_2 = 5\mu\text{F}$.)

(c) Man zeige, dass Q_n und U_n konvergieren und berechne den Grenzwert.

Lösung: (a) Die Ladung in K_1 zu Beginn ist Q_0, was nach dem Kondensatorgesetz C_1U_0 entspricht. Nach dem Angleichen der Spannungen in den beiden Kondensatoren ist die Ladung Q_0 auf die beiden Kondensatoren verteilt. Das Kondensatorgesetz besagt, dass die Ladung in K_1 dann C_1U_1 entspricht und die Ladung in K_2 gerade C_2U_1 ist. (Da die Spannungen angeglichen sind, haben beide Kondensatoren die Spannung U_1.) Die Summe dieser beiden Werte ist somit Q_0 und wir haben

$$C_1U_0 = Q_0 = C_1U_1 + C_2U_1 = (C_1 + C_2)U_1.$$

Division durch $C_1 + C_2$ ergibt

$$U_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U_0.$$

Für die Ladung folgt daher

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} C_1 U_0 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_0.$$

Bei jedem weiteren Entladungsschritt geschieht das Gleiche, wir haben also allgemein

$$Q_n = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n Q_0 \qquad U_n = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)^n U_0.$$

(b) Für die gewählten Kapazitäten haben wir

$$\frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{100}{100 + 5} = \frac{20}{21}.$$

Gesucht ist also ein N mit $\left(\frac{20}{21}\right)^N < \frac{1}{100}$. Dieses N findet man zum Beispiel durch schrittweises Multiplizieren von $\frac{20}{21}$ mit sich selbst (mitzählen nicht vergessen), bis man $\frac{1}{100}$ unterschreitet. Dies geschieht bei $N = 95$.

(Anmerkung: Sobald der Logarithmus und seine Rechenregeln in der Vorlesung eingeführt sind, kann man N auch auf einem anderen Weg berechnen.)

(c) Bei Q_n und U_n handelt es sich jeweils um Vielfache der Folgenglieder der geometrischen Folge q^n mit $q = \frac{C_1}{C_1+C_2}$. Da dieses q eine positive Zahl kleiner als 1 ist, konvergieren beide Folgen gegen 0.

□