Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*
16. November 2012

***Aufgabe 1.** Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\sqrt[n]{4})$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3 10^n}{(3n)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3}{n^3-n^2+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n}{3^n(n^2-n+3)}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{3^n+4}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2+n^n}{(2n)!}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2+((2n)!)^2}{(3n)!}$

Lösung: Damit eine Reihe konvergiert, ist es notwendig, dass die Summanden eine Nullfolge bilden. Um dies zu erkennen, ist es hilfreich, damit vertraut zu sein, wie schnell bestimmte Ausdrücke wachsen. Hierfür gelten folgende Faustregeln:

- Polynome wachsen umso schneller, je größer die höchste Potenz ist.
- n-te Potenzen von Konstanten „wachsen schneller“ als Polynome. Formell heißt dies: Teilt man ein Polynom durch eine n-te Potenz, konvergiert dieser Quotient gegen Null.

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

- Fakultäten wachsen schneller als n-te Potenzen von Konstanten.
- n^n wächst schneller als $n!$ aber langsamer als $(2n)!$.

Anhand dieser Faustregeln kann man teilweise bereits erkennen, ob eine Reihe konvergieren kann, beziehungsweise welche Größenordnung eine mögliche Majorante oder Minorante haben sollte.

Bei der Auswahl, welches Kriterium auf welche Reihe anzuwenden ist, kann man in der folgenden Weise vorgehen:

1. Bei alternierenden Vorzeichen auf Leibniz-Kriterium untersuchen.

   Bei der Reihe in Teil (a) kann man zum Beispiel zeigen, dass die Beträge eine monotone Nullfolge bilden. Damit liefert das Leibniz-Kriterium die Konvergenz der Reihe.

2. Bestehen die Summanden ausschließlich aus n-ten Potenzen, ist das Wurzelkriterium angebracht.

   In Teil (b) sind nur Potenzen vorhanden, man betrachtet daher die n-te Wurzel aus dem n-ten Summanden. Durch Umformen zeigt man, dass er gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert, was kleiner als 1 ist. Somit sagt uns das Wurzelkriterium, dass die Reihe konvergiert.

3. Treten in den Summanden Fakultäten auf (nicht unbedingt ausschließlich), sollte man sich am Quotientenkriterium versuchen.

   Der Quotient in Teil (c) konvergiert gegen $\frac{10}{27}$, was kleiner 1 ist. Somit ist die Reihe konvergent.

4. Bestehen die Summanden ausschließlich aus Polynomen und Wurzeln, sollte man das Majorantenkriterium oder Minorantenkriterium wählen. Hierzu ist es wichtig, zunächst einmal die Größenordnung der Summanden abzuschätzen.

   In Teil (d) haben wir ein quadratisches Polynom im Zähler und ein kubisches Polynom im Nenner, der Quotient wird sich daher in etwa wie $\frac{1}{n}$ verhalten. Dementsprechend ist die harmonische Reihe ein Kandidat für eine Minorante. Man versucht daher, denn Nenner durch ein Vielfaches von n mal den Zähler nach oben abzuschätzen. In diesem Fall ist nicht schwer zu zeigen, dass $\frac{n}{2}$ mal Zähler größer als der Nenner ist. Somit ist jeder Summand größer als $\frac{2}{n}$ und $\sum \frac{2}{n}$ eine divergente Minorante.

   In Teil (e) ist die größte Potenz unter der Wurzel n^3, die Größenordnung wird also $\frac{1}{n^{3/2}}$ betragen, was eine konvergente Reihe ergibt. Man schätzt hier also den Nenner nach unten durch $\sqrt{n^3}$ ab und erhält $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ als konvergente Majorante.

5. Kommen sowohl Polynome als auch n-ten Potenzen vor, kann man wie im vorherigen Schritt das Majoranten-/Minorantenkriterium anwenden. Das Quotientenkriterium ist auch möglich, meist jedoch die kompliziertere Variante.

   In Teil (f) sehen wir etwa, dass die Polynome im Zähler und Nenner beide quadratisch sind. Ihr Quotient konvergiert gegen den Quotienten ihrer Koeffizienten vor n^2, also gegen 2. Für großes n ist ihr Quotient also immer kleiner als 3 und wir können die Summanden durch $\frac{3}{3^n}$ nach oben abschätzen. Somit haben wir in $\sum \frac{3}{3^n}$ eine konvergente Majorante gefunden.

6. Grundsätzlich gilt: Steht im Nenner eine Summe und wir wollen Konvergenz beweisen, schätzen wir den Nenner nach unten ab. Wollen wir Divergenz zeigen, wählen wir eine Abschätzung nach oben.

   In Teil (g) sehen wir, dass die Größenordnung $\frac{2^n}{3^n}$ beträgt und die Reihe konvergieren sollte. Also wollen wir den Nenner nach unten abschätzen. Hierfür nehmen wir den größeren Term 3^n und wählen ihn als untere Schranke. Danach gehen wir wie im folgenden Schritt vor.

7. Falls die Summanden selbst Summe von Ausdrücken sind (zum Beispiel im Zähler eine Summe von Potenzen und Fakultäten steht), können wir versuchen, die Reihe aufzusplitten und die einzelnen Teile nach den obigen Kriterien zu behandeln. Konvergieren die einzelnen Reihen (wie in Teil (g) und (h)), konvergiert auch die gesamte Reihe. Erhalten wir eine divergierte Reihe und alle anderen konvergieren (wie in Teil (i)), dann divergiert die gesamte Reihe.

   Achtung: Erhalten wir zwei oder mehr divergente Reihen, war unsere Aufteilung nicht erfolgreich und wir können auf diese Art keine Aussage zur Konvergenz treffen.

$\square$

Aufgabe 2. Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4+(-2)^n)^n}$ in Anhängigkeit von x

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2+2n)}{3^n(n^2-3)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n n^2}{(n+3)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin(\frac{1}{n})$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^2-3}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+4^{n^2}}{n!}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!+(2n)!4^{n+1}}{4^n(n!)^2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2-n+1}$

Lösung: (a) Hier bietet sich das Wurzelkriterium an. Als n-te Wurzel erhalten wir $\frac{x}{4+(-2)^n}$, was für jedes x gegen 0 konvergiert. Also ist die Reihe für alle x konvergent.

(b) Hier kann man zum Beispiel das Majorantenkriterium anwenden. Die n-ten Potenzen sind der überwiegende Faktor im Summanden, wir versuchen daher, die entsprechende geometrische Reihe als Majorante zu verwenden. Dafür müssen wir $\frac{n^2+2n}{n^2-3}$ nach oben abschätzen. Da dieser Bruch gegen 1 konvergiert, können wir ihn (für hinreichend großes n) durch 2 abschätzen und erhalten $\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n$ als konvergente Majorante.

(c) Hier verwenden wir das Quotientenkriterium und sehen leicht, dass der Quotient gegen 0 konvergiert, also die Reihe konvergent ist.

(d) Aufgrund der wechselnden Vorzeichen ist das Leibniz-Kriterium angebracht. Mit $\frac{1}{n}$ geht auch $\sin(\frac{1}{n})$ monoton gegen 0, weshalb die Reihe konvergiert.

(e) Anhand der höchsten Potenzen im Zähler und Nenner sehen wir, dass sich die Summanden wie $\frac{1}{2n}$ verhalten. Es ist sogar leicht zu sehen, dass die Summanden größer als $\frac{1}{2n}$ sind, weshalb $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ eine divergente Minorante ist.

(f) Hier müssen wir, bevor wir eines der Kriterien anwenden, die Reihe in zwei Teile aufspalten. Für den ersten Teil zeigt das Quotientenkriterium leicht die Konvergenz, für den zweiten Teil folgt aber Divergenz (der Quotient ist hier $\frac{4^{2n+1}}{n+1}$, was divergent ist). Also ist die gesamte Reihe divergent.

(g) Auch hier müssen wir zuerst die Reihe aufspalten. Für den ersten Teil folgt die Konvergenz leicht, denn $\frac{1}{4^n n!}$ ist kleiner als $\frac{1}{4^n}$, weshalb die geometrische Reihe eine Majorante ist. Für den zweiten Teil bietet sich das Quotientenkriterium an. Hierbei erhalten wir einen Quotienten, der größer als 1 ist, weshalb dieser Teil (und daher die gesamte Reihe) divergiert.

(h) Die Größtenordnung der Summanden ist $\frac{4}{n^2}$, wir versuchen daher, eine entsprechende Majorante zu zeigen. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ kann nicht selbst als Majorante dienen, weil ihre Summanden kleiner als die der gegebenen Reihe sind. Allerdings ist $\frac{4}{n^2-n+1}$ kleiner als $\frac{4}{(n-1)^2}$, also können wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ nach Verschieben des Indexes n als Majorante verwenden.

Alternativ kann man auch zeigen, dass $\frac{4}{n^{\frac{3}{2}}}$ eine Majorante ist.

$\square$