Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

23. November 2012

***Aufgabe 1.** Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-8}$$

und

$$g(x) = \frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-2x^2-5x+6}$$

Bestimmen Sie alle Stellen $x \in \mathbb{R}$, an denen die Funktionen nicht definiert sind. An welchen dieser Stellen sind sie hebbar stetig?

Lösung: Nicht definiert sind die Funktionen an den Nullstellen des Nenners. Nach der Formel für die Nullstellen eines quadratischen Polynoms liegen diese für f bei $x = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3$, also bei $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$. Beide Werte sind keine Nullstellen des Zählers, weshalb die Funktionswerte für $x \to x_1$ oder $x \to x_2$ gegen $\pm\infty$ gehen. Daher ist f an beiden Stellen nicht hebbar stetig.

Für g ist das Finden von Nullstellen schwieriger. Eine Nullstelle findet man aber schnell durch Ausprobieren: Es ist $f(1) = 0$. Daher können wir den Nenner als Produkt von $x-1$ mit einem quadratischen Polynom schreiben. Dieses quadratische Polynom ermittelt man durch Polynomdivision: Man teilt x^3-2x^2-5x+6 durch $x-1$. Im Folgenden zeigen wir eine Möglichkeit, wie man dabei vorgehen kann. Gesucht ist ein Polynom ax^2+bx+c, welches mit $x-1$ multipliziert x^3-2x^2-5x+6 ergibt. Es soll also

$$x^3-2x^2-5x+6 = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)-c$$

sein. Vergleichen wir die Koeffizienten vor den einzelnen Potenzen von x, erhalten wir (von links nach rechts) $a = 1$, $b-1 = -2$ und somit $b = -1$,

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

sowie $c-(-1)=-5$ und somit $c=-6$. (Man beachte, dass $c=-6$ auch für den konstanten Anteil korrekt ist.) Wir haben also

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6).$$

Für x^2-x-6 können wir die Nullstellen wieder wie zuvor ausrechnen und bekommen $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$. Insgesamt haben wir den Nenner also in $(x-1)(x-3)(x+2)$ zerlegt und gezeigt, dass g genau an den Stellen 1, 3 und -2 nicht definiert ist.

Setzen wir die Nullstellen des Nenners in den Zähler ein, sehen wir, dass 1 auch eine Nullstelle des Zählers ist. Analog zum Vorgehen beim Nenner können wir den Zähler in $(x-1)(x^2+2x-1)$ zerlegen. Wir haben also

$$g(x)=\frac{x^3+x^2-3x+1}{x^3-2x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x^2+2x-1)}{(x-1)(x-3)(x+2)}.$$

Für $x\in\mathbb{R}\setminus\{1,3,-2\}$ können wir mit $x-1$ kürzen und erhalten

$$g(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x-3)(x+2)}.$$

Diese Funktion ist an der Stelle 1 definiert und hat dort den Wert $-\frac{1}{3}$. Somit ist g hebbar stetig in $x_0=1$. An den anderen beiden Stellen ist es nicht hebbar stetig, da diese Nullstellen des Nenners aber nicht des Zählers sind. □

Aufgabe 2. Gegeben sind die Funktionen

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$$

und

$$g(x)=\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3+3x^2-6x-8}$$

Bestimmen Sie alle Stellen $x\in\mathbb{R}$, an denen die Funktionen nicht definiert sind. An welchen dieser Stellen sind sie hebbar stetig?

Lösung: Die Nullstellen des Nenners (diese berechnen sich wie oben) von f sind 3 und -2, genau dort ist f nicht definiert. Die Nullstellen des Zählers sind 1 und -2. Also haben wir

$$f(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}.$$

Für jeden Wert x im Definitionsbereich von f sind alle Faktoren im Nenner dieses Bruchs ungleich Null, somit können wir mit $x+2$ kürzen und erhalten

$f(x) = \frac{x-1}{x-3}$. Diese Darstellung von f ist auch im Punkt $x = -2$ definiert und somit ist f in -2 hebbar stetig. (Den dazugehörigen Funktionswert erhalten wir durch Einsetzen von -2 als $\frac{3}{5}$.) An der Stelle 3 hingegen ist f nicht hebbar stetig, da 3 eine Nullstelle des Nenners aber nicht des Zählers ist.

Für g müssen wir wieder zuerst eine Nullstelle des Nenners durch Ausprobieren finden. Zum Beispiel ist -1 eine Nullstelle. Als nächstes versuchen wir wieder, den Nenner als $(x+1)(ax^2+bx+c)$ zu schreiben. Hierfür muss

$$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$$

gelten. Durch Vergleich der einzelnen Koeffizienten ergibt sich $a = 1$, $b = 2$ und $c = -8$, also ist der Nenner $(x+1)(x^2+2x-8)$. Die Nullstellen von x^2+2x-8 findet man wieder durch die übliche Formel: Es sind 2 und -4. Insgesamt haben wir den Nenner damit zu $(x+1)(x-2)(x+4)$ zerlegt. Auf die gleiche Art und Weise können wir den Zähler in $(x+1)(x-2)(x+2)$ zerlegen.

Nicht definiert ist g also in den Punkten -1, 2 und -4. Die ersten beiden dieser Punkte sind aber auch Nullstellen des Zählers und somit ist g dort hebbar stetig.

Anmerkung: Es kommt bei der hebbaren Stetigkeit dieser Art von Funktionen nicht nur darauf an, ob eine Nullstelle x_0 des Nenners auch Nullstelle des Zählers ist, sondern auch auf die Vielfachheit der Nullstelle (dies ist die Anzahl der Faktoren $x - x_0$ bei der obigen Zerlegung). Die Funktion ist genau dann in x_0 hebbar stetig, wenn x_0 mindestens ebenso oft Nullstelle des Zählers wie des Nenners ist. $\square$