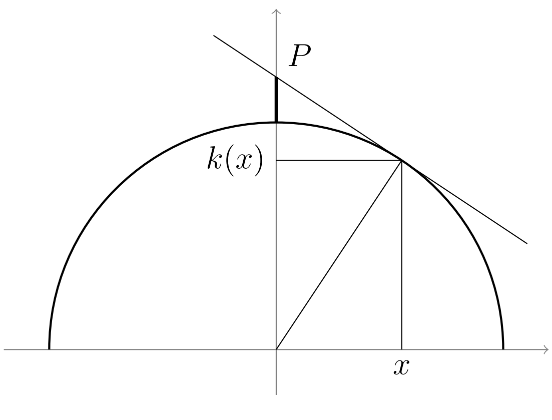
Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

30. November 2012

***Aufgabe 1.** Wie weit kann man bei optimalen Sichtverhältnissen von einem 100 Meter hohen Turm aus sehen? Hierfür nehmen wir als Näherung die Erde als perfekte Kugel mit 6367 Kilometern Radius an.

Lösung: Da die Sichtweite unabhängig von der Blickrichtung ist, genügt es einen Querschnitt der Erde zu betrachten. Diesen legen wir so in ein Koordinatensystem, dass der Erdmittelpunkt im Koordinatenursprung liegt und der Turm auf der y-Achse verläuft. Länge 1 im Koordinatensystem entspreche 1 Kilometer. Die Erdoberfläche entspricht im Koordinatensystem also einem Kreis vom Radius 6367, das sind alle Punkte (x, y) mit $x^2 + y^2 = 6367^2$. Die Spitze des Turms liegt im Punkt $P = (0, 6367.1)$. Die Situation ist in der folgenden (nicht maßstabsgerechten) Abbildung skizziert.



Wir suchen nun eine Tangente an den Kreis, welche durch P verläuft. Diese Tangente kann den Kreis nur im oberen Halbkreis berühren und dieser Halbkreis wird durch die Funktion $y = k(x) = \sqrt{6367^2 - x^2}$ beschrieben. Anhand der Ableitung dieser Funktion können wir die Tangentengleichung in

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

jedem Punkt berechnen. Die Ableitung von $\sqrt{x}$ ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, nach der Kettenregel haben wir also

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6367^2 - x^2}}(6367^2 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{6367^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{6367^2 - x^2}}.$$

Die Tangente des Kreises im Punkt $(x_0, k(x_0))$ wird daher durch die Gleichung

$$y = k(x_0) + k'(x_0)(x - x_0) = \sqrt{6367^2 - x_0^2} - \frac{x_0(x - x_0)}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}}$$

beschrieben.

Da wir eine Tangente finden wollen, die durch P verläuft, soll die Gerade am x-Wert 0 den y-Wert 6367.1 haben. Wir suchen also ein x_0, so dass

$$\sqrt{6367^2 - x_0^2} - \frac{x_0(0 - x_0)}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}} = 6367.1$$

gilt. Diese Gleichung können wir nach x_0 auflösen:

$$\begin{aligned}
6367.1 &= \sqrt{6367^2 - x_0^2} + \frac{x_0^2}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}} \\
&= \frac{6367^2 - x_0^2}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}} + \frac{x_0^2}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}} \\
&= \frac{6367^2}{\sqrt{6367^2 - x_0^2}} \\
\Longleftrightarrow \qquad \sqrt{6367^2 - x_0^2} &= \frac{6367^2}{6367.1} \\
\Longleftrightarrow \qquad 6367^2 - x_0^2 &= \frac{6367^4}{6367.1^2} \\
\Longleftrightarrow \qquad x_0 &= \pm\sqrt{6367^2 - \frac{6367^4}{6367.1^2}} \approx \pm 35.684
\end{aligned}$$

Der weiteste Punkt, den man vom Turm aus sehen kann, ist also der Punkt $(35.684, k(35.684)) \approx (35.684, 6366.9)$. Wir müssen nun nur noch die Entfernung zum Turm berechnen. Die Entfernung ist Luftlinie

$$\sqrt{35.684^2 + (6367 - 6366.9)^2} \approx 35.68445$$

zum Fuß des Turmes, beziehungsweise

$$\sqrt{35.684^2 + (6367.1 - 6366.9)^2} \approx 35.68487$$

zur Spitze des Turmes. Definieren wir „Entfernung“ hingegen als Länge auf der Erdoberfläche (also als Länge des Kreisbogens), dann entspricht $\frac{x}{6367}$ dem Sinus des Winkels des Kreisbogens und die Entfernung somit

$$6367 \cdot \arcsin\left(\frac{35.684}{6367}\right) \approx 35.684497.$$

(Diese Werte liegen sehr nah beieinander, weil x sehr klein im Verhältnis zum Radius des Kreises ist, weshalb sich die Länge des Kreisbogens kaum von der direkten Länge unterscheidet.) $\square$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die folgenden Ableitungen

(a) $\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)'$

(b) $\left(x^{(x^x)}\right)'$

(c) $\left(e^{(x^2)}\right)'$

(d) $(x \cdot |x|)'$

(e) $\left(\sqrt{\ln x}\right)'$

(f) $\left(\sqrt[4]{x}\right)'$, indem Sie $\sqrt[4]{x}$ als $\sqrt{\sqrt{x}}$ betrachten.

(g) $\left(\sqrt[4]{x}\right)'$, indem Sie $\sqrt[4]{x}$ als Umkehrfunktion von x^4 betrachten.

Lösung: (a) Die Ableitung von $\ln x$ ist $\frac{1}{x}$ und die Ableitung von $\frac{x-1}{x+1}$ ist $\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$. Nach der Kettenregel ist daher

$$\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.$$

Alternativ kann man auch $\ln(\frac{x-1}{x+1}) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$ schreiben und erhält

$$\begin{aligned}\left(\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' &= (\ln(x-1))' - (\ln(x+1))' = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x^2-1}.\end{aligned}$$

(b) Bevor wir die Ableitung berechnen können, müssen wir die Funktion erst umschreiben:

$$x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x} = e^{e^{x \ln x} \ln x}.$$

Die Kettenregel liefert uns nun

$$\begin{aligned}
\left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{e^{x \ln x} \ln x}\right)' = e^{e^{x \ln x} \ln x} \left(e^{x \ln x} \ln x\right)' \\
&= x^{(x^x)} \left(e^{x \ln x} (\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \ln x + e^{x \ln x} \frac{1}{x} \right) \\
&= x^{(x^x)} x^x \left((\ln x)^2 + \ln x + \frac{1}{x} \right).
\end{aligned}$$

(c) Hier können wir einfach die Kettenregel anwenden und erhalten

$$\left(e^{(x^2)}\right)' = 2xe^{(x^2)}.$$

(d) Für $x > 0$ entspricht die Funktion x^2 und hat daher die Ableitung $2x$. Für $x < 0$ entspricht sie $-x^2$ und hat die Ableitung $-2x$. Für $x = 0$ müssen wir den Differenzenquotienten betrachten:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \cdot |\varepsilon| - 0}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} |\varepsilon| = 0$$

Die Ableitung ist also $-2x$ für $x < 0$, 0 für $x = 0$ und $2x$ für $x > 0$. Dies können wir kürzer als

$$(x \cdot |x|)' = 2|x|$$

schreiben.

(e) Auch hier können wir die Ableitung mit der Kettenregel berechnen:

$$\left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x}.$$

Alternativ können wir $\sqrt{\ln x}$ auch als Umkehrfunktion von $e^{(x^2)}$ betrachten. (Genauer, als Umkehrfunktion der Einschränkung von $e^{(x^2)}$ auf den Bereich $[0, \infty)$.) Dann bekommen wir

$$\left(\sqrt{\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x} e^{(\sqrt{lnx})^2}} = \frac{1}{2x\sqrt{lnx}}.$$

(f) Betrachten wir $\sqrt[4]{x}$ als $\sqrt{\sqrt{x}}$, dann müssen wir die Kettenregel verwenden. Diese liefert uns

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{x^3}}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}.$$

Dies entspricht auch der Ableitung, die man auf dem üblichen Weg erhält, denn $\sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ und somit $(\sqrt[4]{x})' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$.

(g) Betrachten wir $\sqrt[4]{x}$ nun als Umkehrfunktion von x^4, ergibt sich direkt

$$\left(\sqrt[4]{x}\right)' = \frac{1}{4(\sqrt[4]{x})^3}. \qquad \square$$