Tutorium Mathematik I, M
Lösungen*

7. Dezember 2012

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen. Welche davon sind globale Extrema?

$$(*) \qquad a(x) = \exp\left(\sqrt{4-x^2}\right)$$
$$(*) \qquad b(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1}$$
$$c(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$d(x) = \ln x - \sqrt{\ln x}$$
$$e(x) = x + \sin x$$

Lösung: (a) Die Funktion a ist für alle $x \in [-2, 2]$ definiert. Da dies ein kompaktes Intervall ist, wissen wir, dass a dort ein Maximum und ein Minimum besitzt. Wir müssen daher nur alle Kandidaten für lokale Extrema bestimmen und deren Funktionswerte vergleichen. Lokale Extrema können sowohl auf den Randpunkten also auch im Inneren des Intervalls liegen. Extrema im Inneren des Intervalls müssen $a'(x) = 0$ erfüllen. Nach der Kettenregel haben wir

$$a'(x) = \left(\exp\left(\sqrt{4-x^2}\right)\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \exp\left(\sqrt{4-x^2}\right).$$

Dies ist Null genau für $x = 0$. Mögliche Extrema sind also $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$, kein anderer Punkt kann ein Extremum sein. Die dazugehörigen Funktionswerte sind $f(x_1) = f(x_3) = 1$ und $f(x_2) = e^2$. Daher hat die Funktion in x_2 ein globales Maximum und in x_1 und x_3 globale Minima.

*Die mit * markierten Aufgaben wurden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben waren von den Studierenden zu bearbeiten.

(b) Die Funktion b ist für alle $x \neq -1$ definiert. In diesem Fall wissen wir nicht, ob es globale Extrema gibt. Da der Definitionsbereich keine Randpunkte hat, müssen lokale Extrema also im Inneren des Bereichs liegen und $b(x) = 0$ erfüllen. Es ist nach der Quotientenregel

$$\begin{aligned} b'(x) = \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}\right)' &= \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Dies ist Null genau für $x = 0$. Allerdings ist auch $b''(0) = 0$ (man rechnet nach, dass $b''(x) = \frac{12x(x^3+1)^2 - 2(x^3+1)\cdot 3x^2 \cdot 6x^2}{(x^3+1)^4}$, was für $x = 0$ Null ist), also liefert die Bedingung von Leibniz keine Aussage, ob es sich um ein Extremum handelt. Und in der Tat ist es kein Extremum: Für jedes $x \neq 0$ ist $b'(x) > 0$, also ist b auf $(-\infty, -1)$ und auf $(-1, \infty)$ jeweils streng monoton wachsend und hat keine Extrema.

(c) Die Funktion c ist für alle $x \neq 0$ definiert. Erneut wissen wir, dass Extrema nur innere Punkte sein können. Die Ableitung von c ist

$$c'(x) = \left(\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)' = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Der Faktor $\exp\left(-\frac{1}{x^3}\right)$ ist immer positiv und auch der Faktor $\frac{2}{x^3}$ ist nie Null. Daher hat c' keine Nullstellen und c somit keine Extrema.

(d) Die Funktion d ist für alle $x \in [1, \infty)$ definiert, denn der Logarithmus muss definiert und nicht negativ sein. Zuerst berechnen wir wieder die Ableitung, um mögliche innere Extrema zu finden. Es ist

$$d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\right).$$

Der Faktor $\frac{1}{x}$ ist nie Null, der andere Faktor ist genau dann Null, wenn $\sqrt{\ln x} = \frac{1}{2}$ gilt. Dies entspricht $\ln x = \frac{1}{4}$ beziehungsweise $x = e^{\frac{1}{4}}$. Die möglichen Extremstellen sind also der Randpunkt $x_1 = 1$ und der Punkt $x_2 = e^{\frac{1}{4}}$.

Um festzustellen, ob es tatsächlich Extrema sind, gibt es mehrere Optionen. Zum Einen ist der Faktor $1 - \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$ streng monoton steigend, weil der Logarithmus streng monoton steigt. Also ist der Faktor – und somit auch $d'(x)$ – für $x \in (1, e^{\frac{1}{4}})$ negativ und für $x > e^{\frac{1}{4}}$ positiv und d ist auf $[1, e^{\frac{1}{4}}]$ streng monoton fallend und auf $[e^{\frac{1}{4}}, \infty)$ streng monoton steigend. Somit haben wir in 1 ein lokales Maximum und in $e^{\frac{1}{4}}$ ein globales Minimum. Da $d(1) = 0$ gilt und $d(x)$ für $x > e$ positiv ist (denn dann ist $\ln x > 1$ und somit $\ln x > \sqrt{\ln x}$), ist das Maximum in 1 nicht global.

Alternativ kann man auch die zweite Ableitung berechnen (dabei ist die Darstellung $d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ leichter weiter abzuleiten). Diese ist

$$d''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2\sqrt{\ln x} + \frac{1}{2x\sqrt{lnx}}}{4x^2 \ln x}.$$

Setzen wir hier $x = e^{\frac{1}{4}}$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} d''(e^{\frac{1}{4}}) &= -e^{-\frac{1}{2}} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2e^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2}}}{4e^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{4}} = -e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1 + e^{-\frac{1}{4}}}{e^{\frac{1}{2}}} \\ &= -e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{3}{4}} > 0. \end{aligned}$$

Da die Ableitung hier positiv ist, liegt in $e^{\frac{1}{4}}$ ein Minimum vor. Da kein anderer inner Punkt ein Extremum ist, muss an der Stelle 1 ein Maximum vorliegen.

(e) Die Funktion e ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Die Ableitung ist

$$e'(x) = 1 + \cos x,$$

was genau an den Stellen $x_n = \pi + 2\pi n$ für $n \in \mathbb{Z}$ Null ist. Dies sind also die einzigen Kandidaten für Extrema. Da aber die Ableitung an allen anderen Stellen positiv ist, ist e streng monoton steigend und besitzt somit keine Extrema.

In der Tat ist die zweite Ableitung an allen Stellen x_n Null (und die Bedingung von Leibniz liefert uns keine Aussage), denn es ist $e''(x) = -\sin x$ und der Sinus ist Null für alle Vielfachen von π.

$\square$