

Tutorium Mathematik I, M

19. Oktober 2012

***Aufgabe 1.** Ein *Fischauge* ist ein Objektiv in der Photographie, welches einen sehr großen Bildwinkel (gewöhnlich 180°) abbilden kann. Hierfür muss das Bild zum Rand hin stark verzerrt werden. Wir simulieren diese Verzerrung in der Gauß'schen Zahlenebene durch die Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{z}{|z| + a}, \quad \text{für } a > 0.$$

- (a) Stellen Sie die komplexe Zahl z in Polarkoordinaten dar. Welche Auswirkung hat die Anwendung von f auf Betrag und Argument?
- (b) Zeigen Sie $f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und geben Sie die Umkehrfunktion an.
- (c) Auf welche geometrischen Objekte werden Geraden in \mathbb{C} durch f abgebildet? Was geschieht mit Kreisen mit 0 als Mittelpunkt?

Aufgabe 2. Wir betrachten die Funktion g , die jede komplexe Zahl $z \neq 0$ auf $\frac{1}{z}$ abbildet.

- (a) Welche Auswirkung hat die Anwendung von f auf Betrag und Argument einer komplexen Zahl?
- (b) Bestimmen Sie die Bildmenge von f und geben Sie die Umkehrfunktion an.
- (c) Auf welche geometrischen Objekte werden Geraden in \mathbb{C} durch f abgebildet? Was geschieht mit Kreisen mit 0 als Mittelpunkt? Für welche weiteren Kreise können Sie das Bild noch angeben?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{1}{(z - 1 - i)(z - 1) + iz + 1 - i} = \frac{i}{z^2 - 2z + 2}.$$