Formelsammlung, Klausur 1

Mathematik I, M, Übungen

Komplexe Zahlen

$z = a + bi,\ a = \mathrm{Re}(z)$ Realteil, $b = \mathrm{Im}(z)$ Imaginärteil

Komplex konjugierte Zahl:

$$\bar{z} = a - bi$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Polarkoordinaten:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Vektorrechnung

Länge eines Vektors:

$$\left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Parameterfreie Ebenengleichung:

$\vec{n} \cdot \vec{x} = C,\ \vec{n}$ senkrecht zur Ebene und C eine Konstante

Winkel φ zwischen Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}|\ |\vec{y}|}$$

Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{x} \times \vec{y}|$$

Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:

$$|\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$$

Folgen

Geometrische Folge:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Majorantenkriterium: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und gilt $|b_n - a| \le |a_n - a|$ für alle n, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
Monotoniekriterium: Jede beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$ ist konvergent.

Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{für } |q| < 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergiert für } \alpha > 1$$

Majorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Minorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine divergente Minorante, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Wurzelkriterium: Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ ab einem Index N, dann divergiert die Reihe.
Quotientenkriterium: Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ ab einem Index N, dann divergiert die Reihe.
Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Funktionen

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln(x^a) = a\ln(x)$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \cot(x + \pi) = \cot(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \cot(-x) = -\tan(x)$$

Satz von Weierstraß: Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann gibt es einen Punkt in $[a, b]$ mit maximalem Funktionswert sowie einen mit minimalem Funktionswert.
Zwischenwertsatz: Ist f auf dem Intervall $[a, b]$ stetig, dann kommt jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ irgendwo in $[a, b]$ als Funktionswert vor.