Übungen Mathematik I, M

Nachklausur zur Klausur 1, Lösungen

28.2.2013

1. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Untersuchen Sie für jeden der beiden Punkte A und B, ob dieser auf g liegt oder nicht. Falls ein Punkt nicht auf g liegt, bestimmen Sie jeweils seinen Abstand von g.

Lösung: Wir untersuchen zuerst, ob A auf g liegt. Dies ist der Fall, wenn es ein λ gibt mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ 4-2\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Koordinate folgt, dass $\lambda = 0$ sein muss. Dann stimmen aber die ersten beiden Koordinaten nicht überein. Also gibt es kein solches λ und A liegt daher nicht auf g.

Nun untersuchen wir, ob B auf g liegt. Dies ist der Fall, wenn es ein λ gibt mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ 4-2\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Aus jeder der drei Koordinaten folgt $\lambda = 2$. Also ist die Gleichung für $\lambda = 2$ erfüllt und B liegt daher auf g.

Es bleibt der Abstand von A zu g zu bestimmen. Ein beliebiger Punkt auf g hat die Form

$$\begin{pmatrix} -3+2\lambda \\ 4-2\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix}$$

und sein Abstand von A ist

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3+2\lambda\\4-2\lambda\\4-\lambda\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}6-2\lambda\\-3+2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\right|&=\sqrt{(6-2\lambda)^2+(-3+2\lambda)^2+\lambda^2}\\&=\sqrt{9\lambda^2-36\lambda+45}\\&=3\sqrt{\lambda^2-4\lambda+5}\\&=3\sqrt{\lambda^2-4\lambda+4+1}\\&=3\sqrt{(\lambda-2)^2+1}.\end{aligned}$$

Dieser Abstand ist genau dann minimal, wenn $(\lambda-2)^2$ minimal ist, also für $\lambda=2$. Der Abstand ist dann 3.

Alternativ kann man auch wie folgt argumentieren: Wir haben bereits gezeigt, dass B auf g liegt. Die Gerade durch A und B verläuft senkrecht zu g, denn

$$(A-B)\times\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}=4-2-2=0.$$

Also ist der Abstand von A zu g gleich dem Abstand von A und B, also $\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$. □

2. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x, welche die Gleichung

$$\cos(2x)+2\sin(x)+3=0$$

erfüllen.

Lösung: Aus der Summenformel

$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$$

erhalten wir für den Spezialfall $x=y$ die Identität

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x).$$

Setzen wir dies in die zu lösene Gleichung ein und verwenden wir noch $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$, also $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned}&&\cos^2(x)-\sin^2(x)+2\sin(x)+3&=0\\&\Longleftrightarrow&1-\sin^2(x)-\sin^2(x)+2\sin(x)+3&=0\\&\Longleftrightarrow&-2\sin^2(x)+2\sin(x)+4&=0\\&\Longleftrightarrow&\sin^2(x)-\sin(x)-2&=0.\end{aligned}$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen liefert

$$\sin(x)=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1\pm3}{2},$$

also $\sin(x) = 2$ oder $\sin(x) = -1$. Da der Sinus keine Werte größer als 1 annimmt, bleibt nur $\sin(x) = -1$.

Lösungen der Gleichung sind also alle x mit $\sin(x) = -1$, das sind genau die Zahlen der Form $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. □

3. Überprüfen Sie die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4n+4} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n}$$

auf Konvergenz.

Lösung: Beim Summand der ersten Reihe entspricht der Nenner $(n+2)^2$. Der Zähler ist kleiner als $\sqrt{n+2}$, also ist

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n^2+4n+4} < \frac{\sqrt{n+2}}{(n+2)^2} = \frac{1}{(n+2)^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergiert, konvergiert nach dem Majorantenkriterium auch die ursprüngliche Reihe.

Bei der zweiten Reihe verwenden wir das Quotientenkriterium. Der $n+1$-te Summand geteilt durch den n-ten Summand ist

$$\frac{\frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n}} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2}{n^2 \cdot 3} = \frac{2(n^2+2n+1)}{3n^2} = \frac{2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{3}$$

und konvergiert somit gegen $\frac{2}{3}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe also. □

4. Zu der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+6}$$

bestimme man

(a) die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$;

(b) den Bildbereich, also alle $y \in \mathbb{R}$, für die ein x mit $f(x) = y$ existiert.

Lösung: (a) Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{x^2-3}{x^2+6} = \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{6}{x^2}},$$

was für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ gegen 1 konvergiert. Also sind beide Grenzwerte 1.

(b) Wir schreiben f um als

$$\frac{x^2-3}{x^2+6} = 1 - \frac{9}{x^2+6}.$$

(Diese Form kann man auch schon im ersten Aufgabenteil benutzen.)

Da Quadrate immmer positiv sind, ist der Bruch auf der rechten Seite ebenfalls positiv und somit $f(x)$ immer kleiner als 1.

Minimal ist $f(x)$, wenn der Bruch (wegen des negativen Vorzeichens) maximal ist, also der Nenner minimal. Dies ist für $x = 0$ der Fall. Wir haben also $f(x) \geq f(0) = -\frac{1}{2}$.

Da die Funktion stetig ist und nach dem ersten Aufgabenteil Werte beliebig nahe an 1 annimmt, werden alle Werte zwischen $-\frac{1}{2}$ und 1 angenommen. Der Bildbereich ist also $[-\frac{1}{2}, 1)$. $\square$