

Mathematik I WS 2012/13

12. Übungsblatt

1. Berechnen Sie für die Funktionen $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ und $g(x) = \frac{\exp(\sqrt{x+1}-1)-1}{x}$ die Grenzwerte für $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$ und $x \rightarrow \infty$.
2. Finden Sie zu $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ alle Extremstellen und Asymptoten.
3. Bestimmen Sie alle Asymptoten von $f(x) = \frac{x^3-4x^2+4x-8}{2x^2-8x}$.
4. Bestimmen Sie alle Asymptoten von $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x^2-4x+3}\right)$.
5. Berechnen Sie die Taylorreihen vom Sinus und vom Cosinus am Punkt $x_0 = 0$. Für welche x konvergieren die Reihen?
6. Berechnen Sie die Taylorreihen vom Sinus Hyperbolicus und vom Cosinus Hyperbolicus am Punkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Reihen die Identitäten

$$\cosh(x) = \cos(ix) \quad \text{und} \quad \sinh(x) = -i \sin(ix).$$

7. Zeigen Sie

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

8. Bestimmen Sie zu der Funktion $f(x) = x^{11} - x^{10} - x^9$ das Taylorpolynom vom Grad 3 um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$. Berechnen Sie damit eine Näherung des Funktionswertes $f(0.999)$.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Finden Sie mit Hilfe des Satzes von Lagrange eine Abschätzung für das Restglied in der vorherigen Aufgabe an der Stelle $x = 0.999$.