Mathematik I WS 2012/13
14. Übungsblatt

1. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$\frac{3x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 7x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

2. Bestimmen Sie die Integrale

$$\int \frac{3x^2 - 7x - 36}{x^2 - 16} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{x \ln(x)(\ln(x) - 1)} dx.$$

3. Bestimmen Sie die Integrale

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} dx.$$

4. Bestimmen Sie die Integrale

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

5. Bestimmen Sie das Integral

$$\int \frac{1 - \sin(x)}{1 + \sin(x)} dx.$$

6. Wir wollen die Funktion $f(x) = x^2 + a$ auf dem Intervall $[b, c]$ integrieren. Dazu betrachten wir die Unterteilung von $[b, c]$ in n gleich lange Teilintervalle $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Welcher Wert ergibt sich für die Riemannsche Summe $\sum_{k=1}^{n} f(a_k)(x_k - x_{k-1})$, wenn wir $a_k = x_k$ für jedes k wählen? Was ist der Grenzwert dieser Werte?

7. Wir wollen die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $[1, 2]$ integrieren. Hierfür wählen wir die gleiche Aufteilung in Teilintervalle und die gleichen a_k wie in der vorigen Aufgabe. Welcher Wert ergibt sich hier für die Riemannsche Summe? Zeigen Sie, dass dieser Wert stets zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 liegt.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Überlegen Sie sich anhand der Definition des bestimmten Integrals, dass die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad \text{falls } f(x) \leq g(x)$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$