

# Mathematik I WS 2012/13

## 3. Übungsblatt

1. Gegeben seien  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $z_1 = a + bi$  und  $z_2 = c + di$ .

(a) Geben Sie den Real- und Imaginärteil von  $\frac{z_1}{z_2}$  und  $z_1 z_2$  an.

(b) Sei  $z_1 = 1 + 3i$ . Bestimmen Sie die Mengen

$$M_1 = \{z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im}(z_1 z_2) = 0\}, \quad M_2 = \{z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re}(z_1 z_2) = 0\},$$
$$M_3 = \{z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0\}, \quad M_4 = \{z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 0\}$$

und stellen Sie sie graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(c) Durch welche Symmetrieabbildungen der Ebene lassen sich diese Mengen ineinander überführen?

2. Bestimmen Sie alle  $z \in \mathbb{C}$ , welche die folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{(2 + 3i)z^2 + 6 - 4i}{(1 + i)z + 2i} = (2 + i)z - 1 - 3i.$$

3. Ermitteln Sie jene Punktmengeten in  $\mathbb{C}$ , die durch die folgenden Gleichungen festgelegt werden und stellen Sie sie jeweils graphisch in der Gauß'schen Zahlenebene dar.

(a)  $(1 + 2i)z + \overline{(1 + 2i)z} = 3,$

(b)  $|z + 12| = 3|z - 12|.$

4. Bestimmen Sie alle Zahlen  $u, v \in \mathbb{C}$ , welche die Gleichung

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{2u + v}$$

erfüllen.

5. Es seien  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Zeigen Sie

(a)  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}),$

(b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$

(c)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$

6. Die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bilden ein Dreieck.

(a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Umkreises des Dreiecks. (Der Umkreis ist der Kreis, welcher durch alle Ecken des Dreiecks verläuft.)

(b) Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck?

7. Betrachten Sie die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sich  $g$  und  $h$ ? Falls ja, geben Sie Schnittpunkt und Winkel an. Falls sie sich nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

8. Sei  $g$  die Gerade durch die Punkte  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Bestimmen Sie alle  $a \in \mathbb{R}$ , für die

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

einen Schnittpunkt mit  $g$  besitzt und geben Sie diesen Schnittpunkt an.