Formelsammlung, Prüfungen

Mathematik I, M, WS 2014/15

Komplexe Zahlen

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$
$$z = a+bi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \bar{z} = a-bi \\ |z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \end{cases}$$

Polarkoordinaten:
$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$$

Wurzeln: Die n-ten Wurzeln von $r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ sind
$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$
für $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Vektorrechnung

$$|\vec{x}| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2+x_2^2} & \text{zweidimensional} \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} & \text{dreidimensional} \end{cases}$$
$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \begin{cases} x_1y_1 + x_2y_2 & \text{zweidimensional} \\ x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 & \text{dreidimensional} \end{cases}$$

Winkel zwischen $\vec{x}, \vec{y}$: $\quad \cos(\varphi) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|}$

Kreuzprodukt: $\quad \vec{x}\times\vec{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$

Geradengleichungen im $\mathbb{R}^2$:
$$\vec{x} = P + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \qquad \text{Parameterform}$$
$$\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{n}, P\rangle \ \text{ mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_1 \end{pmatrix} \qquad \text{Normalform}$$

Ebenengleichungen im $\mathbb{R}^3$:
$$\vec{x} = P + s\vec{q} + t\vec{r} \qquad \text{Parameterform}$$
$$\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{n}, P\rangle \ \text{ mit } \vec{n} = \vec{q}\times\vec{r} \qquad \text{Normalform}$$

Abstand Q zu $\langle \vec{n}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{n}, P\rangle$ (Gerade in $\mathbb{R}^2$/Ebene in $\mathbb{R}^3$):
$$\frac{|\langle \vec{n}, Q\rangle - \langle \vec{n}, P\rangle|}{|\vec{n}|}$$

Fläche des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms:
$$|\vec{x}\times\vec{y}|$$

Volumen des von $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aufgespannten Parallelepipeds:
$$|\langle \vec{x}, \vec{y}\times\vec{z}\rangle|$$

Folgen

Geometrische Folge:
$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q|<1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \text{divergent} & \text{sonst} \end{cases}$$

Harmonische Folge:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Majorantenkriterium: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und gilt $|b_n - a| \le |a_n - a|$ für alle n, dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Einschließungskriterium: Konvergieren sowohl $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a und gilt für jedes $n\in\mathbb{N}$
$$a_n \le b_n \le c_n\,,$$
dann konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

Lineare Rekursionen: Hat das Polynom
$$x^t - c_1x^{t-1} - c_2x^{t-2} - \cdots - c_{t-1}x - c_t$$
lauter verschiedene Nullstellen $\beta_1, \ldots, \beta_t$, dann hat die Lösung der linearen Rekursion
$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ta_{n-t} \quad \text{für } n > t$$
die Form
$$a_n = \alpha_1\beta_1^n + \alpha_2\beta_2^n + \cdots + \alpha_t\beta_t^n\,,$$
wobei die Konstanten $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ durch die Anfangswerte $a_1, \ldots, a_t$ bestimmt werden.

Reihen

konvergent	divergent
$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ für $\|q\| < 1$	$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $\|q\| \ge 1$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Notwendige Bedingung: Eine Reihe kann nur konvergieren, wenn die Folge ihrer Summanden eine Nullfolge ist.

Majorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Minorantenkriterium: Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine divergente Minorante, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Wurzelkriterium: Ist $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 1$ für unendlich viele n, so divergiert sie.

Quotientenkriterium: Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ für ein $q < 1$ und alle n ab einem Index N, dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Insbesondere konvergiert sie, falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$. Ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ ab einem Index N, dann divergiert die Reihe.

Leibniz-Kriterium: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Funktionen

$$e^{x+y} = e^xe^y, \quad e^0 = 1, \quad e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$
$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y), \quad \ln(1) = 0, \quad \ln(x^a) = a\ln(x)$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x+2\pi) = \cos(x)$$
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x), \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$\tan(x+\pi) = \tan(x), \quad \cot(x+\pi) = \cot(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x), \quad \cot(-x) = -\cot(x)$$

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x) \qquad \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

Notwendige Bedingung für Extrema: An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.
Hinreichende Bedingung für Extrema: Gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann ist x eine Maximalstelle von f. Ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$, liegt eine Minimalstelle vor.
Monotonie: Sei f auf $[a, b]$ stetig. Gilt $f'(x) \geq 0$ auf (a, b), dann ist f auf $[a, b]$ monoton steigend. Gilt stattdessen $f'(x) \leq 0$, dann ist f monoton fallend. Gilt sogar $f'(x) > 0$ oder $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton steigend/fallend.
Krümmung: Eine differenzierbare Funktion ist (streng) konvex, falls ihre Ableitung (streng) monoton steigt. Sie ist (streng) konkav, falls die Ableitung (streng) monoton fällt. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem die Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.
Senkrechte Asymptoten: Konvergiert $f(x)$ für $x \to x_0^-$ und für $x \to x_0^+$ gegen ∞ oder $-\infty$, dann hat f bei x_0 eine senkrechte Asymptote.
Schiefe Asymptoten: Konvergiert für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ der Bruch $f(x)/x$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und außerdem $f(x) - ax$ gegen $b \in \mathbb{R}$, dann ist $ax + b$ eine Asymptote von f.

Regel von l'Hospital

Konvergieren f und g für $x \to a$ beide gegen 0 oder beide gegen ∞, dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Taylorreihen und -polynome

Taylorpolynom vom Grad n um x_0:
$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$
Taylorreihe um x_0:
$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$
Konvergenzradius: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergiert für alle x mit $|x - x_0| < R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Für $|x - x_0| = R$ muss man die Konvergenz separat überprüfen.

Integrationsregeln

Partielle Integration:
$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$
Substitution: Setzen wir $x = g(u)$, dann ist
$$\int f(x)dx = \int f\big(g(u)\big)g'(u)du.$$
Insbesondere ist $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$.
Standardsubstitution bei trigonometrischen Funktionen:
$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad dx = \frac{2}{1+u^2}du$$
$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$
Partialbruchzerlegung: Ein Partialbruch ist von der Form
$$\frac{c}{(x-\lambda)^i} \text{ mit } i \in \mathbb{N} \text{ oder der Form } \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta},$$
wobei $x^2 + \alpha x + \beta$ keine reellen Nullstellen hat.
Ist $\frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion mit $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$, dann besteht eine *Partialbruchzerlegung* darin, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Partialbrüchen zu schreiben, deren Nenner Teiler von $Q(x)$ sind.

Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$ / $\int g(x)dx$	$f'(x)$ / $g(x)$	$f(x)$ / $\int g(x)dx$	$f'(x)$ / $g(x)$
$\tan(x)$	$1+\tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\cot(x)$	$-1-\cot(x)^2 = \frac{-1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\mathrm{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\tanh(x)$	$1-\tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\coth(x)$	$1-\coth(x)^2 = \frac{-1}{\sinh(x)^2}$
$\mathrm{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathrm{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert < 1)$	$\mathrm{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $(\lvert x\rvert > 1)$

Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
Ist F eine Stammfunktion von f und beide Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ definiert, dann ist
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
Ist f in a oder b nicht definiert, dann ist
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to a^+} \int_y^b f(x)dx \qquad \text{beziehungsweise}$$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b^-} \int_a^y f(x)dx.$$
Hat f eine Polstelle im Punkt $c \in (a, b)$, dann ist
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to c^-} \int_a^y f(x)dx + \lim_{y\to c^+} \int_y^b f(x)dx.$$
Substitution: Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist
$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big).$$