Tutorium Mathematik I, M

21. November 2014

***Aufgabe 1.** Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen sowie die Bereiche, auf denen sie monoton steigend beziehungsweise monoton fallend sind.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{-x^2 + 3x - 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich der folgenden Funktionen sowie die Bereiche, auf denen sie monoton steigend beziehungsweise monoton fallend sind.

(a) $f_1(x) = \tan\left(x^2\right)$ (b) $f_2(x) = \sqrt{\sin(x)^2 - 2\sin(x) - 3}$

(c) $f_3(x) = x - \dfrac{1}{x}$ (d) $f_4(x) = \arccos\big(\ln(x)\big)$

(e) $f_5(x) = e^{\frac{1}{x}} - e^{2x}$ (f) $f_6(x) = \ln\left(x^3 - x^2\right)$

(g) $f_7(x) = \sqrt{x^2} + x^4$ (h) $f_8(x) = \cos\left(\sqrt{6x - x^2}\right)$

(i) $f_9(x) = e^{2x^2+4x-16}$ (j) $f_{10}(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Definitionsbereich ist

$$D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Die Funktion ist auf dem Intervall $[0, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$ sowie auf jedem Intervall $\left(\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}, \sqrt{\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$ streng monoton steigend. Streng monoton fallend ist sie auf $(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, 0]$ und auf jedem Intervall $\left(-\sqrt{\left(n+1+\frac{1}{2}\right)\pi}, -\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$.

(b) Definitionsbereich ist

$$D_2 = \left\{ \left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi \;\middle|\; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

und dort gilt $f_2(x) = 0$. Also ist f_2 auf D_2 konstant und somit gleichzeitig monoton (aber nicht streng monoton) steigend und fallend.

(c) Definitionsbereich ist

$$D_3 = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Funktion ist sowohl auf der linken Hälfte $(-\infty, 0)$ von D_3 als auch auf der rechten Hälfte $(0, \infty)$ streng monoton steigend, sie ist aber nicht auf ganz D_3 monoton.

(d) Definitionsbereich ist

$$D_4 = \left(\frac{1}{e}, e\right),$$

die Funktion ist auf ganz D_4 streng monoton fallend.

(e) Definitionsbereich ist

$$D_5 = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

die Funktion ist sowohl auf der linken Hälfte $(-\infty, 0)$ von D_5 als auch auf der rechten Hälfte $(0, \infty)$ streng monoton fallend, sie ist aber nicht auf ganz D monoton.

(f) Definitionsbereich ist

$$D_6 = (1, \infty),$$

dort ist die Funktion streng monoton steigend.

(g) Definitionsbereich ist
$$D_7 = \mathbb{R}.$$
Auf $(-\infty, 0]$ ist f_7 streng monoton fallend, auf $[0, \infty)$ streng monoton steigend.

(h) Definitionsbereich ist
$$D_8 = [0, 6].$$
Auf $[0, 3]$ ist f_8 streng monoton fallend, auf $[3, 6]$ streng monoton steigend.

(i) Definitionsbereich ist
$$D_9 = \mathbb{R}.$$
Auf $(-\infty, -1]$ ist f_9 streng monoton fallend, auf $[-1, \infty)$ streng monoton steigend.

(j) Definitionsbereich ist
$$D_{10} = (-\infty, 1] \cup [2, \infty).$$
Auf $(-\infty, 1]$ ist f_{10} streng monoton fallend, auf $[2, \infty)$ streng monoton steigend.