Tutorium Mathematik I, M

12. Dezember 2014

***Aufgabe 1.** Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f(x) = \exp\left(\sqrt{4 - x^2}\right)$

(b) $g(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}\right)$

Aufgabe 2. Man bestimme für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich, alle lokalen und globalen Maxima und Minima sowie das Monotonieverhalten.

(a) $f_1(x) = \dfrac{\ln\big(\ln(x)\big)}{\sqrt{\ln(x)}}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2 + x - 1}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

(d) $f_4(x) = \arctan\left(x^3 - 3x^2 - 9x\right)$

(e) $f_5(x) = \ln(x) - \sqrt{\ln(x)}$

(f) $f_6(x) = \cosh\left(x^2 - 4x - 5\right)$

Die mit * markierten Aufgaben werden vom Vortragenden präsentiert, die restlichen Aufgaben sind von den Studierenden zu bearbeiten.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Der Definitionsbereich ist $(1, \infty)$. An der Stelle $x_0 = e^{(e^2)}$ hat f_1 ein globales Maximum, dementsprechend ist sie auf $(1, x_0]$ streng monoton steigend und auf $[x_0, \infty)$ streng monoton fallend.

(b) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. Bei $x_0 = -\frac{1}{2}$ liegt ein lokales Maximum, auf $\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ und auf $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_0\right)$ ist f_2 streng monoton steigend, auf $\left(x_0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ und auf $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ streng monoton fallend.

(c) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Die Funktion ist auf $(-\infty, -1)$ und auf $(-1, \infty)$ jeweils streng monoton steigend und besitzt keine Extremstellen.

(d) f_4 ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat ein lokales Maximum bei $x_1 = -1$ und ein lokales Minimum bei $x_2 = 3$. Sie ist auf $(-\infty, x_1]$ streng monoton steigend, auf $[x_1, x_2]$ streng monoton fallend und auf $[x_2, \infty)$ wiederum streng monoton steigend.

(e) Der Definitionsbereich ist $[1, \infty)$. Bei $x_0 = e^{\frac{1}{4}}$ liegt ein globales Minimum, im Randpunkt $x = 1$ ein lokales Maximum. Auf $[1, x_0]$ fällt f_5 streng monoton, auf $[x_0, \infty)$ steigt sie.

(f) Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$. Bei $x_1 = -1$ liegt ein lokales Minimum, bei $x_2 = 2$ ein lokales Maximum und bei $x_3 = 5$ ein lokales Minimum. Streng monoton steigend ist f_6 auf $[x_1, x_2]$ und auf $[x_3, \infty)$, streng monoton fallend auf $(-\infty, x_1]$ und auf $[x_2, x_3]$.