

# Formelsammlung, Klausur 2

## Mathematik I, M, Übungen

### Hyperbolische Funktionen

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \quad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

### Ableitungsregeln

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

### Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

*Notwendige Bedingung für Extrema:* An Extremstellen im Inneren des Definitionsbereichs ist die Ableitung 0.

*Hinreichende Bedingung für Extrema:* Gilt  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$ , dann ist  $x$  eine Maximalstelle von  $f$ . Ist  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$ , liegt eine Minimalstelle vor.

*Monotonie:* Sei  $f$  auf  $[a, b]$  stetig. Gilt  $f'(x) \geq 0$  auf  $(a, b)$ , dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton steigend. Gilt stattdessen  $f'(x) \leq 0$ , dann ist  $f$  monoton fallend. Gilt sogar  $f'(x) > 0$  oder  $f'(x) < 0$ , dann ist  $f$  streng monoton steigend/fallend.

*Krümmung:* Eine differenzierbare Funktion ist (streng) konvex, falls ihre Ableitung (streng) monoton steigt. Sie ist (streng) konkav, falls die Ableitung (streng) monoton fällt. Ein *Wendepunkt* ist ein Punkt, an dem die Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt.

*Senkrechte Asymptoten:* Konvergiert  $f(x)$  für  $x \rightarrow x_0^-$  und für  $x \rightarrow x_0^+$  gegen  $\infty$  oder  $-\infty$ , dann hat  $f$  bei  $x_0$  eine senkrechte Asymptote.

*Schiefe Asymptoten:* Konvergiert für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  der Bruch  $f(x)/x$  gegen  $a \in \mathbb{R}$  und außerdem  $f(x) - ax$  gegen  $b \in \mathbb{R}$ , dann ist  $ax + b$  eine Asymptote von  $f$ .

### Regel von l'Hospital

Konvergieren  $f$  und  $g$  für  $x \rightarrow a$  beide gegen 0 oder beide gegen  $\infty$ , dann gilt  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

### Taylorreihen und -polynome

*Taylorpolynom vom Grad  $n$  um  $x_0$ :*

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

*Taylorreihe um  $x_0$ :*

$$T_{f, x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

*Konvergenzradius:*  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$  konvergiert für alle  $x$  mit  $|x - x_0| < R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ . Für  $|x - x_0| = R$  muss man die Konvergenz separat überprüfen.

### Integrationsregeln

*Partielle Integration:*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

*Substitution:* Setzen wir  $x = g(u)$ , dann ist

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))g'(u)du.$$

Insbesondere ist  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$ .

*Standardsubstitution bei trigonometrischen Funktionen:*

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

*Partialbruchzerlegung:* Ein Partialbruch ist von der Form

$$\frac{c}{(x-\lambda)^i} \text{ mit } i \in \mathbb{N} \text{ oder der Form } \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\beta},$$

wobei  $x^2 + \alpha x + \beta$  keine reellen Nullstellen hat.

Ist  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  eine rationale Funktion mit  $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$ ,

dann besteht eine *Partialbruchzerlegung* darin,  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  als Summe von Partialbrüchen zu schreiben, deren Nenner Teiler von  $Q(x)$  sind.

### Wichtige Ableitungen und Integrale

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\int g(x)dx$	$g(x)$	$\int g(x)dx$	$g(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2$ $= \frac{1}{\cos(x)^2}$	$\cot(x)$	$-1 - \cot(x)^2$ $= \frac{-1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\text{arccot}(x)$	$\frac{-1}{x^2+1}$
$\tanh(x)$	$1 - \tanh(x)^2$ $= \frac{1}{\cosh(x)^2}$	$\coth(x)$	$1 - \coth(x)^2$ $= \frac{-1}{\sinh(x)^2}$
$\text{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\text{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\text{artanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $( x  < 1)$	$\text{arcoth}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$ $( x  > 1)$

### Bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ für } a < c < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  und beide Funktionen auf dem Intervall  $[a, b]$  definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ist  $f$  in  $a$  oder  $b$  nicht definiert, dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow a^+} \int_y^b f(x)dx \quad \text{beziehungsweise}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x)dx.$$

Hat  $f$  eine Polstelle im Punkt  $c \in (a, b)$ , dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y \rightarrow c^-} \int_a^y f(x)dx + \lim_{y \rightarrow c^+} \int_y^b f(x)dx.$$

*Substitution:* Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , dann ist

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a)).$$