Mathematik I WS 2014/15
10. Übungsblatt
13.1.2015

Aufgabe 10.1. Wir betrachten die Funktion $f(x) = \tan(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Taylorpolynome p_2 und p_3 vom Grad 2 und 3 von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Wenn p_3 nahe 0 eine gute Näherung für f ist, dann sollten die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{p_3(x) - p_2(x)}{x^3} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - p_2(x)}{x^3}$$

identisch sein. Rechnen Sie nach, dass dies tatsächlich der Fall ist.

Aufgabe 10.2. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche (die Menge aller x, für welche die Reihe konvergiert) für die Potenzreihen

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{2^n(3n-2)}, \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(2n+1)x^n}{2^n(3n-2)}, \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x-2)^n}{2^n(3n-2)^2}.$$

Aufgabe 10.3. Lösen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int \frac{4x-6}{x^2-3x+7}\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int \arctan(x)\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 10.4. Lösen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int \sin(x)e^x\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int \frac{1}{\sqrt{4x^2+4x+2}}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 10.5. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int \frac{7x^3 - 8x^2 + 17x - 11}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 10.6. Bei der Substitution $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ergeben sich die Identitäten $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$, $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Substitution die Integrale

$$\text{(a)} \int \frac{1}{1+\sin(x)}\mathrm{d}x, \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x, \qquad \text{(c)} \int \frac{1}{1-\cos(x)}\mathrm{d}x.$$