

# Mathematik I WS 2014/15

## 12. Übungsblatt

27.1.2015

**Aufgabe 12.1.** Im wilden Westen möchte ein Zugräuber einen fahrenden Zug überfallen. Der Räuber sitzt zunächst auf seinem Pferd am Punkt  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , während der Zug sich am Punkt  $\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \end{pmatrix}$  befindet. Der Zug bewegt sich auf den Gleisen in Richtung  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  mit der konstanten Geschwindigkeit von 3 Einheiten pro Sekunde. Das Pferd des Räubers legt 4 Einheiten pro Sekunde zurück. Wie muss der Räuber reiten, um den Zug in möglichst kurzer Zeit zu erreichen? An welchem Punkt geschieht dies und wie viel Zeit ist dabei vergangen?

**Aufgabe 12.2.** In einem Behälter befinden sich  $w$  kg einer Salzlösung. Die Konzentration der Lösung ist  $c_0$  kg Salz pro Kilogramm Gesamtmasse. Es werden nun  $p$  kg Wasser hinzugefügt, der Inhalt durchmischt und danach  $p$  kg der verdünnten Lösung abgegossen, so dass wieder  $w$  kg im Behälter verbleiben.

- (a) Wie groß ist die Konzentration  $c_n$  der Lösung, wenn der oben beschriebene Vorgang  $n$ -mal hintereinander ausgeführt wird?
- (b) Wie groß ist die Menge  $b_n$  an Salz, die bei der  $n$ -ten Durchführung des Vorganges in der abgegossenen Lösung enthalten ist? Wie viel Salz ist in der Lösung enthalten, die in den ersten  $n$  Schritten *insgesamt* abgegossen wurde?
- (c) Wie verhalten sich die zuvor berechneten Werte, wenn  $n$  sehr groß wird?

**Aufgabe 12.3.** Gegeben sind zwei Schwingungen  $\cos(\omega t)$  und  $2 \cos(\omega t + \varphi)$  mit identischer Frequenz  $\omega$  und einem Phasenunterschied  $\varphi$ . Überlagern sich diese beiden Schwingungen, dann ergibt sich eine Funktion

$$s(t) = \cos(\omega t) + 2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Wir nehmen an, dass  $s(t) = A \cos(\omega t + \psi)$  gilt für geeignete Werte  $A \geq 0$  und  $\psi \in [0, 2\pi)$ .

- (a) Bestimmen Sie  $A$  und  $\psi$  in Abhängigkeit von  $\varphi$ .
- (b) Für welchen Wert von  $\varphi$  ist die Amplitude  $A$  maximal, für welchen minimal? Was sind die dazugehörigen Werte von  $\psi$ ?

**Aufgabe 12.4.** Bestimmen Sie alle reellen Zahlen, welche die Gleichung

$$x \ln(x) = 2e^2$$

erfüllen und begründen Sie, dass dies tatsächlich alle Lösungen sind.

**Aufgabe 12.5.** Sie befinden sich am Ufer eines Flusses von 100 Metern Breite und möchten an einen Punkt am gegenüberliegenden Ufer gelangen, welcher außerdem 100 Meter flussabwärts liegt. Sie können 5 Meter in der Sekunde laufen und 1 Meter in der Sekunde schwimmen. Auf welche Art gelangen Sie am Schnellsten an Ihr Ziel und wie lange benötigen Sie dafür? Vernachlässigen Sie bei Ihren Berechnungen sämtliche Einflüsse der Strömung des Flusses.