Mathematik I WS 2014/15
3. Übungsblatt
4.11.2014

Aufgabe 3.1. Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$,

(b) $\left\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle$.

Aufgabe 3.2. Betrachten Sie die Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Schneiden sich g und h? Falls ja, geben Sie Schnittpunkt und Winkel an. Falls sie sich nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 3.3. Betrachten Sie die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Gerade h durch die Punkte $\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Schneiden sich g und h? Falls ja, geben Sie Schnittpunkt und Winkel an. Falls sie sich nicht schneiden, geben Sie ihren minimalen Abstand an, sowie die Punkte auf den Geraden, welche diesen Abstand zueinander haben.

Aufgabe 3.4. Die Ebene

$$\epsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist in Parameterform gegeben. Bestimmen Sie die Ebenengleichung in Normalform. Bestimmen Sie außerdem den Schnittpunkt von ϵ mit der Geraden

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

sowie den Winkel, in welchem ϵ und g sich schneiden.

Aufgabe 3.5. Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen

$$\epsilon_1\colon 2x - y + 4z = 17 \qquad \text{und} \qquad \epsilon_2\colon 4x + 2y - z = 10.$$

Aufgabe 3.6. Von einer geraden Pyramide mit Volumen 36 sind die Eckpunkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

der quadratischen Grundfläche gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze.

(Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche heißt gerade*, wenn alle vier Kanten von der Spitze zu den Ecken der Grundfläche gleich lang sind.)*

Zur Erinnerung: Das Volumen einer Pyramide ist ein Drittel vom Produkt von Höhe und Grundfläche.